

VYSOKÁ ŠKOLA ZEMĚDĚLSKÁ V PRAZE

nositel Řádu práce

MECHANIZAČNÍ FAKULTA

Pro obor: MZ



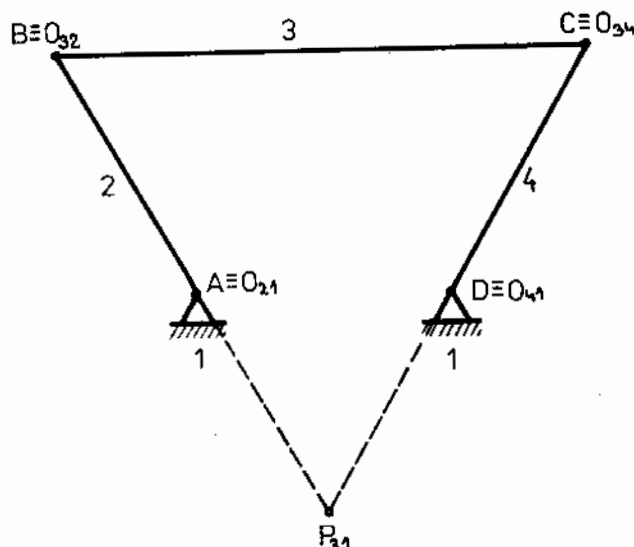
CVIČENÍ Z TECHNICKÉ MECHANIKY II.

Ing. Slavomír Procházka, CSc.

3.0. Okamžité středy otáčení, póly, středy křivosti

Příklad 12.

Určete pól P_{31} čtyřčlenného mechanismu znázorněného na obr. 12.



Obr. 12

Řešení:

Bod tělesa, který má v daném okamžiku nulovou rychlost se nazývá pól pohybu nebo okamžitý střed otáčení.

Pro určení pólu P_{31} mechanismu na obr. 12, použijeme pólovou větu (rozklad pohybů). Pro pól P_{31} platí

$$31 = 32 + 21$$

$$31 = 34 + 41$$

Člen 2 vzhledem k členu 1 (rámu), koná rotační pohyb kolem bodu A. Bod A je tedy okamžitým středem otáčení O_{21} (rychlost v_{21} je nulová).

Člen 3 vzhledem k členu 2 koná rotační pohyb kolem bodu B, bod B je tedy okamžitým středem otáčení O_{32} (rychlost v_{32} je v bodě B nulová).

Podobně bychom mohli definovat pohyby 3:4 a 4:1, při nichž bod $C=O_{34}$ a bod $D=O_{41}$.

Z první rovnice pólové věty (rozkladu pohybů) vyplývá, že pól P_{31} leží na spojnici okamžitých středů otáčení O_{32} a O_{21} . Podle druhé rovnice P_{31} leží na spojnici okamžitých středů otáčení O_{34} a O_{41} . Pól P_{31} tedy leží v průsečíku těchto přímk.

Hledaný pól je možné určit též z úvahy, že "pól leží v průsečíku normál". V našem příkladě bod B leží na členu 3, ale též na členu 2. Při pohybu 31 tento bod opisuje kružnici se středem v bodě A. Spojnice bodů A, B je jednou normálou. Druhou normálu určíme stejnou úvahou. Bod C leží na členu 3, ale též na členu 4, při pohybu 31 tedy opisuje kružnici kolem bodu D. Spojnice bodů C, D je druhou normálou. Pól P_{31} leží v jejich průsečíku.

Příklad 13.

Vyhledejte póly P_{31} , P_{42} excentrického klikového mechanismu schematicky znázorněného na obr. 13.

Řešení:

Hledané póly nejdříve určíme použitím pólové věty. Pro pól P_{31} platí

$$31 = 32 + 21$$

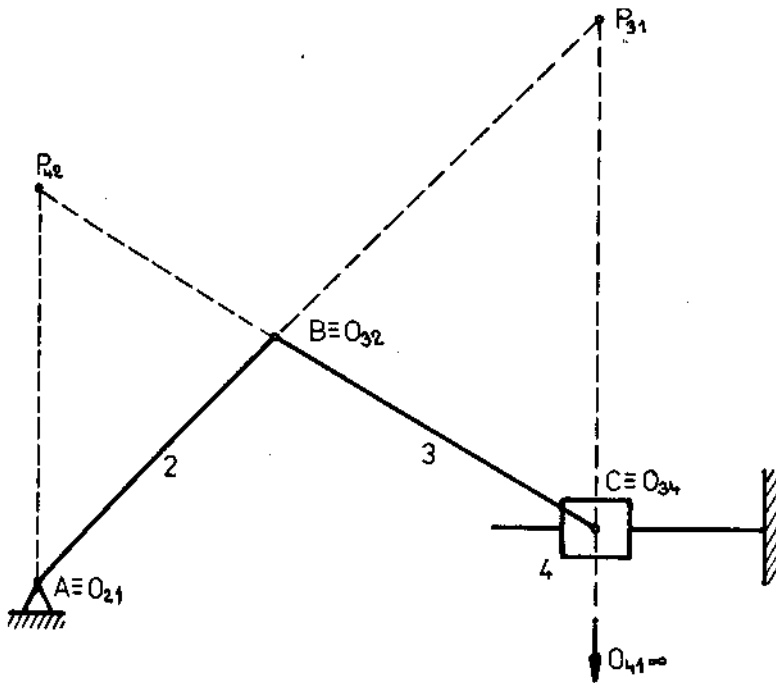
$$31 = 34 + 41$$

a pro pól P_{42}

$$42 = 41 + 12$$

$$42 = 43 + 32$$

Bod A je totožný s okamžitým středem otáčení O_{21} , bod $B \equiv O_{32}$, bod $C \equiv O_{34}$. Pohyb 41 je posuvný, okamžitý střed otáčení O_{41} leží v nekonečnu na kolmici k vedení



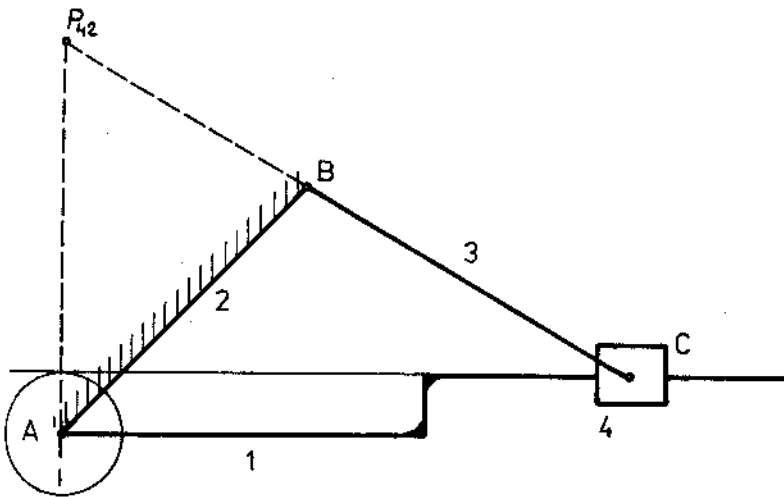
Obr. 13

pístu (pohyb 41), procházející bodem C. Jedna přímka, na níž leží pól P_{31} , prochází středy otáčení O_{32} , O_{21} , druhá středy otáčení O_{34} , O_{41} . Pól P_{31} leží v jejich průsečíku.

Podobně pól P_{42} leží v průsečíku přímek procházejících středy otáčení O_{32} , O_{34} a O_{21} , O_{41} .

Úlohu je možné řešit též z úvahy, že pól leží v průsečíku příslušných normál. Při pohybu 31 bod B koná pohyb po kružnici se středem v bodě A, bod C posuvný pohyb se středem v nevlastním bodě. Spojnice bodů A, C tvoří jednu normálu, spojnice bodu C s nevlastním bodem druhou normálu, pól P_{31} je tedy v jejich průsečíku.

Pro určení pólu P_{42} , je vhodné, pro lepší představu, uvolnit člen 1 a jako rám považovat člen 2, obr. 13.1. Bod C při pohybu 42 koná pohyb po kružnici se středem v bodě B, spojnice těchto bodů tvoří jednu normálu. Určení druhé normály je poněkud složitější. Určíme ji z obáلكové věty, která říká, že "střed



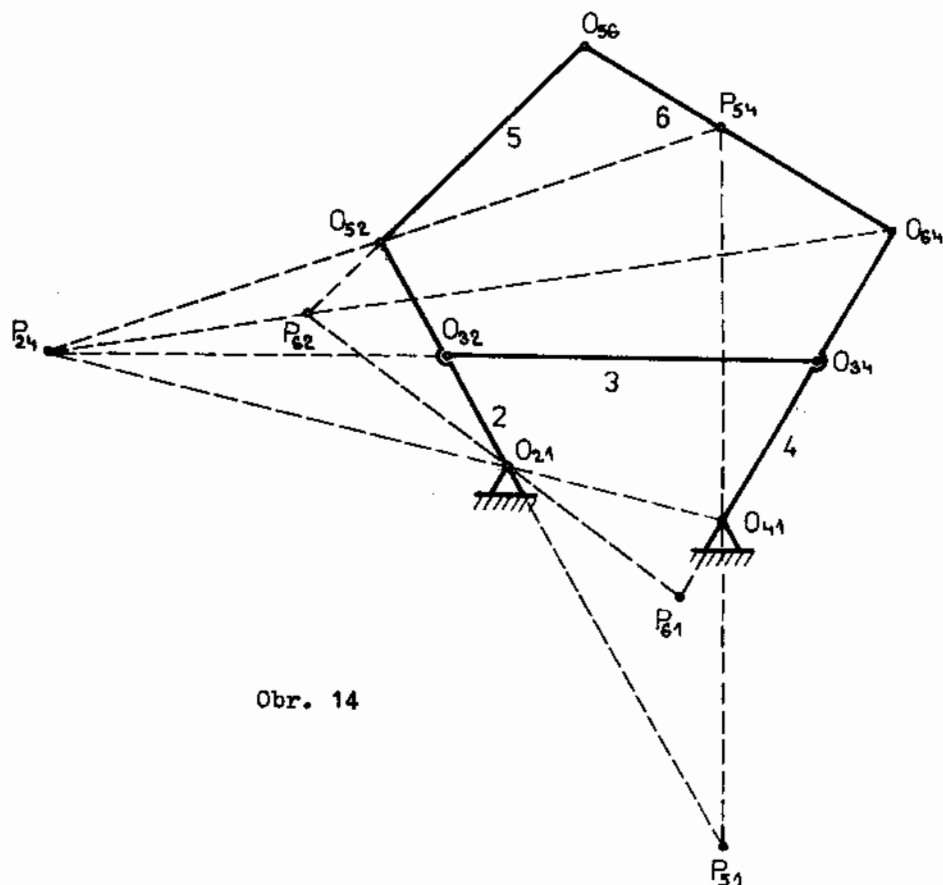
Obr. 13.1

křivosti obálky je středem křivosti trajektorie, středu křivosti výtvarné křivky". Člen 1 při pohybu 42 obaluje kružnici (vytváří obálku) se středem v bodě A. Výtvarnou křivkou je přímka se středem křivosti v nekonečnu, který leží na kolmici

na člen 1. Protože střed křivosti obálky a střed křivosti výtvarné křivky leží na jedné přímce (normále), je touto úvahou určena druhá normála. Tato normála prochází bodem A a je kolmá na člen 1. Pól P_{42} leží v průsečíku těchto normál.

Příklad 14.

Určete póly P_{51} , P_{61} šestičlenného mechanismu schematicky znázorněného na obr. 14.



Obr. 14

Řešení:

K určení hledaných pólů je výhodné použít pólové věty - rozkladu pohybů. Nejprve si v obrázku označíme známé okamžité středy otáčení O_{21} , O_{32} , O_{52} , O_{56} , O_{64} , O_{34} , O_{41} . Nyní napíšeme rozklad např. pro pohyb 51, který rozložíme na dva současné pohyby. Platí

$$51 = 52 + 21$$

$$51 = 54 + 41$$

V tomto rozkladu neznáme pól P_{54} , proto provedeme další rozklad

$$54 = 52 + 24$$

$$54 = 56 + 64$$

zde neznáme pól P_{24} , další rozklad bude

$$24 = 21 + 14$$

$$24 = 23 + 34$$

Okamžité středy otáčení O_{21} , O_{14} , O_{23} , O_{34} známe, proto můžeme sestrojit pól P_{24} . Použitím pólu P_{24} stanovíme pól P_{54} a dále pól P_{51} .

Nyní napíšeme dva rozklady pro pól P_{61}

$$61 = 64 + 41$$

$$61 = 62 + 21$$

Neznáme pól P_{62} , proto další rozklad bude

$$62 = 65 + 52$$

$$62 = 64 + 42$$

Okamžité středy otáčení O_{65} , O_{52} , O_{64} , O_{42} známe, můžeme tedy sestrojit pól P_{62} a dále pól P_{61} .

Příklad 15.

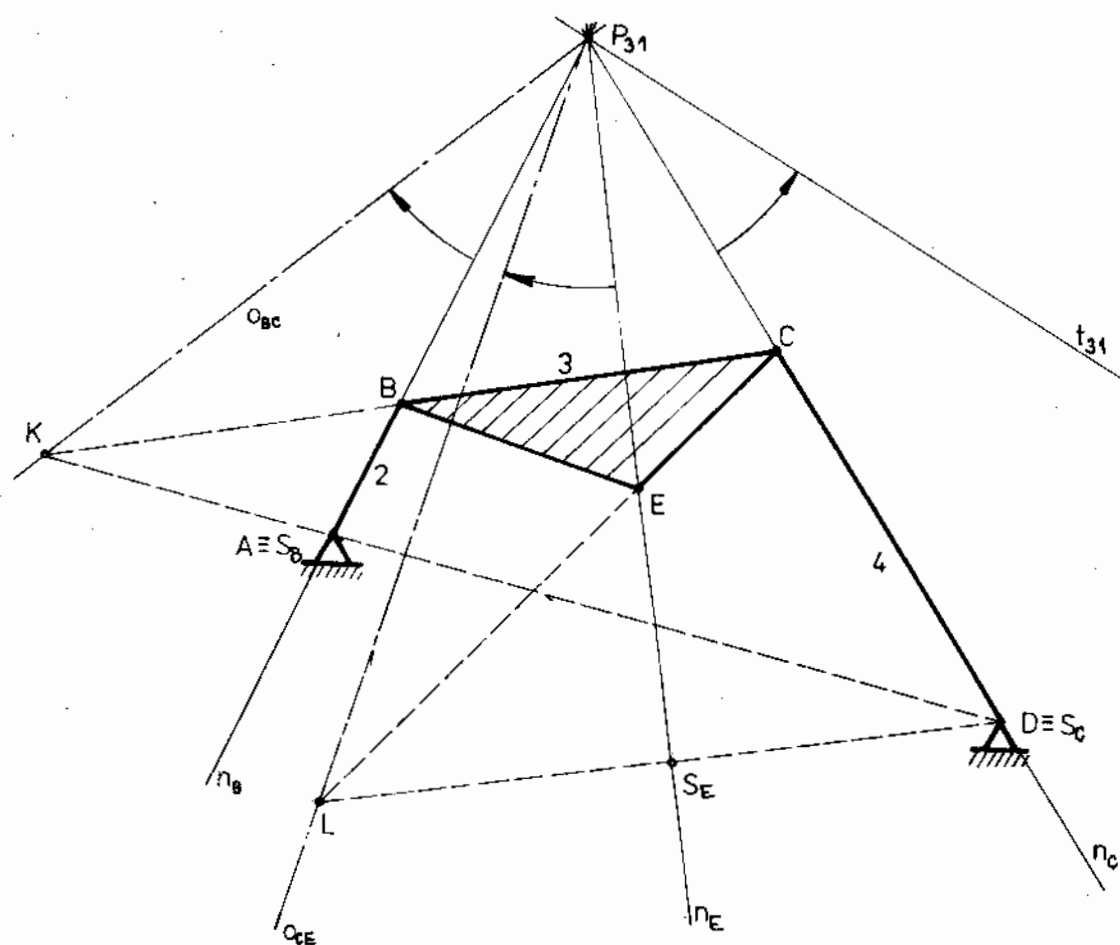
Určete střed křivosti dráhy bodu E čtyřčlenného čtyřkloubového mechanismu, schematicky znázorněného na obr. 15.

Řešení:

Bod E leží na členu 3, který vzhledem k rámu (členu 1) vykonává obecný pohyb. Bod E není společný ani s tělesem 2 ani s tělesem 4, proto pro určení jeho středu křivosti použijeme Bobillierovu konstrukci. K tomu potřebujeme na tělese 3 znát dva body a středy křivosti jejich drah. Jedním z těchto bodů je bod B, který leží současně na tělese 2, jenž koná rotační pohyb kolem bodu A, takže bod A je totožný se středem křivosti trajektorie bodu B ($A \equiv S_B$), druhý je bod C u něhož analogicky $D \equiv S_C$. Spojnice bodů B, S_B je tedy normála bodu B (n_B) a spojnice bodů C, S_C je n_C . V průsečíku těchto normál leží pól P_{31} , který je jedním z bodů osy kolineace o_{BC} . Druhým bodem osy kolineace je průsečík spojnice bodů B, C a jejich středů křivosti trajektorií S_B , S_C , na obr. 15 bod K. (Každé dvojici bodů obecně přísluší jiná osa kolineace).

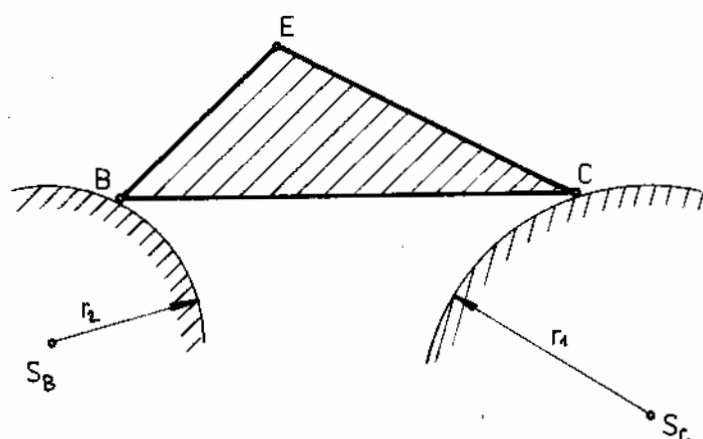
Nyní použijeme Bobillierovu větu, která říká "úhel, který svírá normála trajektorie jednoho bodu s osou kolineace je stejný jako úhel, který svírá normála trajektorie druhého bodu s tečnou. Tyto úhly měřeny od normál jsou opačného smyslu". V našem příkladu, úhel od normály n_B k ose o_{BC} přeneseme v opačném smyslu od normály n_C , čímž obdržíme tečnu polodií t_{31} .

Dále na tělese 3 vezmeme jinou dvojici bodů, z nichž jeden je bod u kterého hledáme střed křivosti, t.j. bod E a druhý je bod u kterého známe střed křivosti. V našem příkladu druhý bod může být bod B nebo C. Zvolíme dvojici bodů např. C, E. Použitím uvedené Bobillierovy věty sestrojíme osu kolineace o_{CE} bodů C, E. Platí, úhel, který svírá normála n_C bodu C s tečnou t_{31} je stejný jako úhel, který svírá normála n_E bodu E s osou kolineace o_{CE} , ale v opačném smyslu. Nyní na ose o_{CE}



Obr. 15

určíme bod L o němž platí (obdobně jako o bodu K ležícím na ose o_{BC}), že leží v průsečíku příslušných bodů a jejich středů křivosti. Spojnice bodů C, E vytne na ose o_{CE} bod L, který spojíme se středem křivosti trajektorie S_C . V průsečíku spojnice LS_C a normály n_E leží střed křivosti trajektorie S_E .



Obr. 15.1

Poznámka:

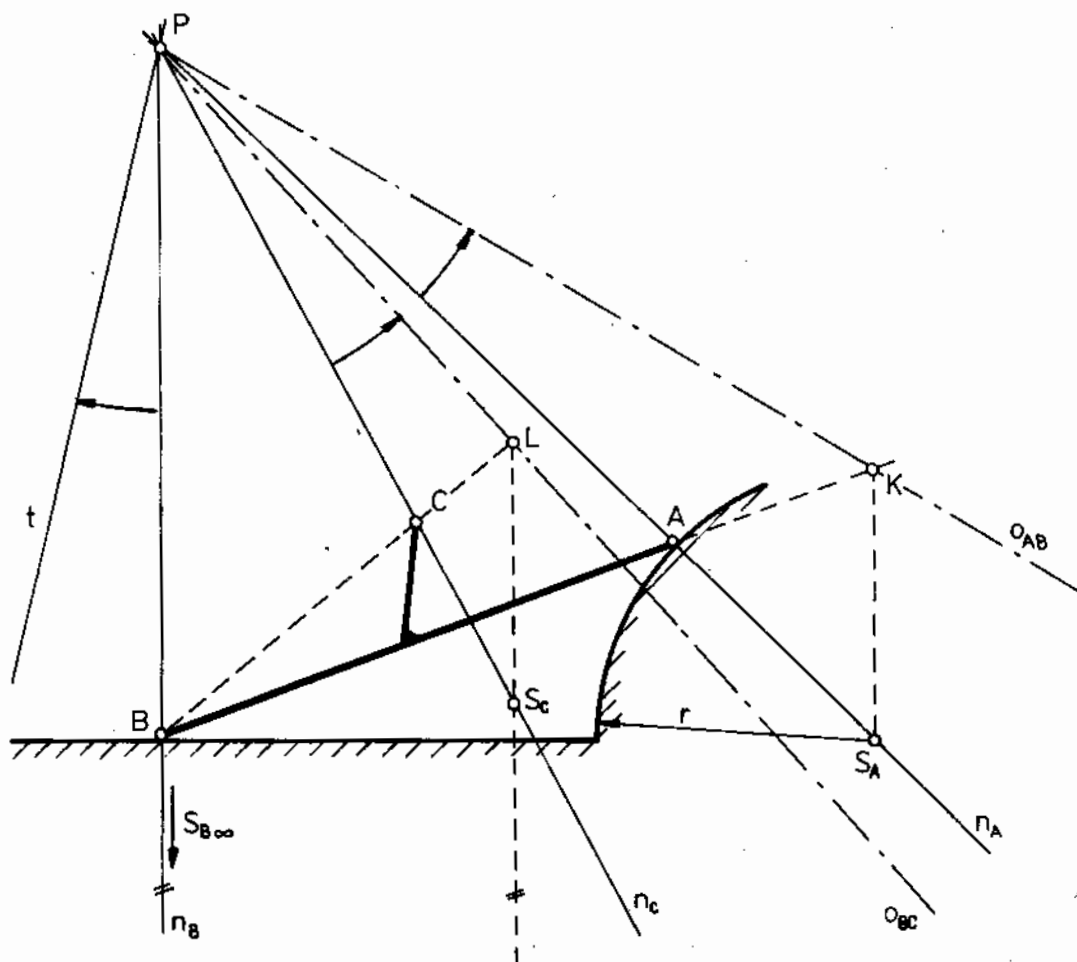
Rovinnou soustavu znázorněnou schematicky na obr. 15, můžeme kinematicky považovat za okamžitý náhradní mechanismus pro pohyb tělesa zobrazeného na obr. 15.1. Určení středu křivosti trajektorie bodu E je tedy stejné jako v příkladu na obr. 15.

Příklad 16.

Určete střed křivosti trajektorie bodu C tělesa, schematicky znázorněného na obr. 16. Bod B tělesa se pohybuje po přímce a bod A po kružnici.

Řešení:

provedeme Bobillierovou konstrukcí. Postup řešení tohoto příkladu stručně shrneme:



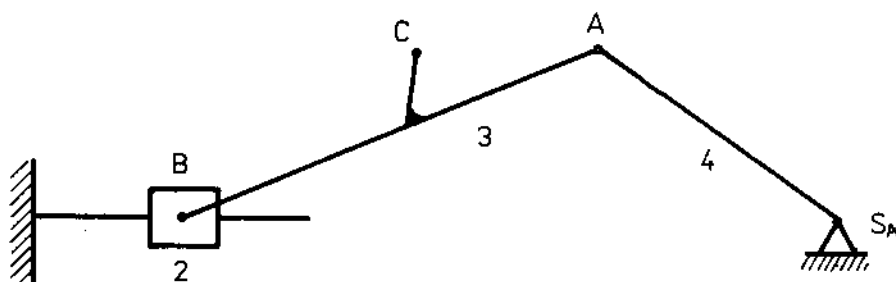
Obr. 16

- na tělese, obr. 16, na němž leží bod C najdeme dva body a středy křivosti jejich drah. Těmito body jsou; bod A, jehož střed křivosti trajektorie je ve středu kružnice S_A , a bod B, který se pohybuje po přímce a střed křivosti jeho trajektorie je v nevlastním bodě $S_{B\infty}$.
- sestrojíme osu kolineace o_{AB} bodů A, B. Jeden její bod je pól P_{31} (průsečík normál n_A, n_B), druhý je bod K, který obdržíme jako průsečík spojnice bodů A, B a S_A, S_B .
- sestrojíme tečnu k poloidám t (normála n_A svírá s osou o_{AB} stejný úhel jako svírá normála n_B s tečnou, ale v opačném smyslu).
- nakreslíme osu kolineace o_{BC} (normála n_B svírá s tečnou t stejný úhel jako svírá normála n_C s osou kolineace o_{BC} , ale v opačném smyslu).

- e) určíme střed křivosti trajektorie S_C (spojnice bodů B, C vytne na ose kolineace o_{BC} bod L, který spojíme se středem křivosti $S_{B\infty}$ a v průsečíku s normálou n_C obdržíme S_C).

Poznámka:

Klíkový mechanismus na obr. 16.1 můžeme považovat za náhradní mechanismus pro kinematické řešení příkladu na obr. 16. Stanovení středu křivosti trajektorie bodu C klikového mechanismu je shodné s popsaným řešením v př. 16.



Obr. 16.1

Příklad 17.

Určete střed křivosti trajektorie bodu C mechanismu schematicky znázorněného na obr. 17.

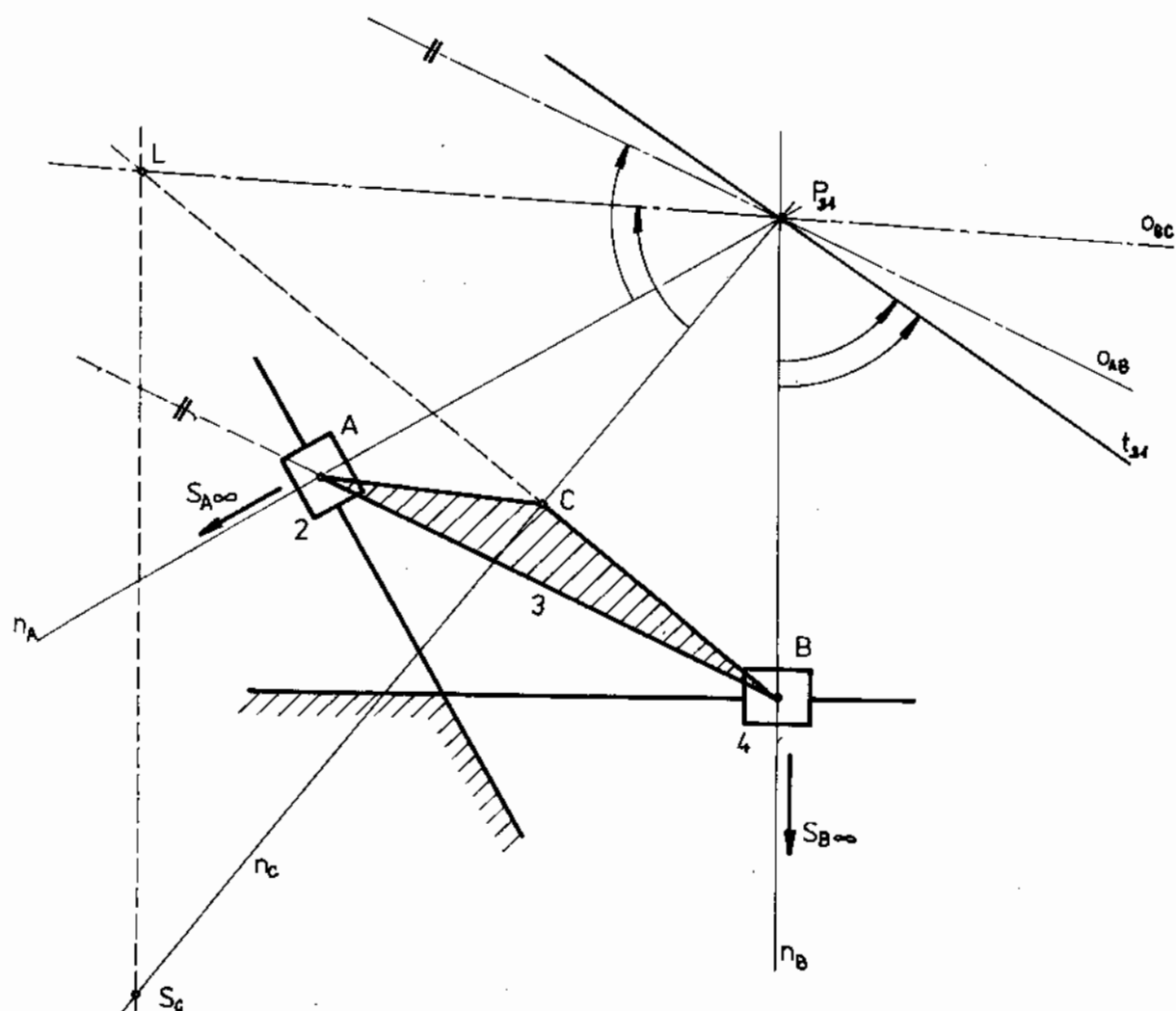
Řešení:

provedeme Bobillierovou konstrukcí. Bod C leží na tělese 3, při čemž pohyb 31 je obecný. Postup řešení stručně shrneme:

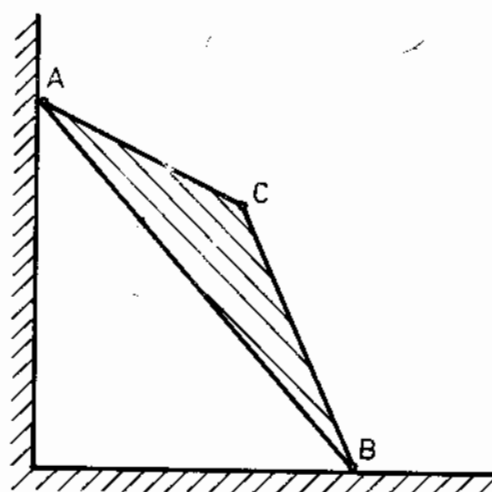
- na tělese 3 najdeme dva body a středy křivosti jejich drah. Jeden bod je A, který současně leží na tělese 2 jenž koná posuvný pohyb (vůči tělesu 1), S_A je v nevlastním bodě, druhý bod je B, ležící současně na tělese 4, pohyb 41 je rovněž posuvný, takže S_B je také nevlastním bodem.
- sestrojíme osu kolineace o_{AB} bodů A, B. Jeden z bodů osy kolineace je pól P_{31} ležící v průsečíku normál n_A , n_B , druhým bodem je nevlastní bod, který leží v průsečíku spojnice bodů A, B a $S_{A\infty}$, $S_{B\infty}$.
- sestrojíme tečnu k poloidám t_{31} , pro níž platí, že úhel mezi normálou n_A a osou kolineace o_{AB} je stejný jako úhel mezi normálou n_B a tečnou t_{31} , úhly mají opačné smysly.
- určíme osu kolineace o_{BC} bodů B, C, normála n_B svírá s tečnou t_{31} stejný úhel jako normála n_C s osou kolineace o_{BC} , ale v opačném smyslu.
- určíme střed křivosti trajektorie S_C . Spojnice bodů B, C protne osu kolineace o_{BC} v bodě L, tento bod spojíme se středem křivosti trajektorie $S_{B\infty}$ a v průsečíku s normálou n_C obdržíme S_C .

Poznámka:

Mechanismus na obr. 17 můžeme kinematicky považovat za náhradní mechanismus pro pohyb tělesa na obr. 17.1. Určení středu křivosti S_C je shodné.



Obr. 17

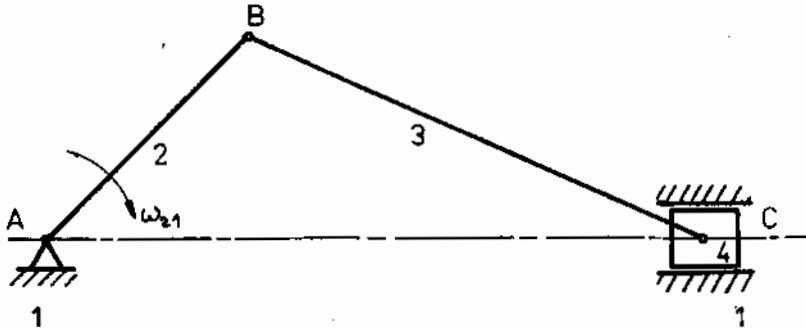


Obr. 17.1

4.0. Přímé metody řešení rychlostí

Příklad 18.

Určete graficky rychlost pístu (bodu C) klikového mechanismu schematicky znázorněného na obr. 18. Pro řešení použijte přímou metodu. Je dána úhlová rychlost ω_{21} .



Obr. 18

Řešení:

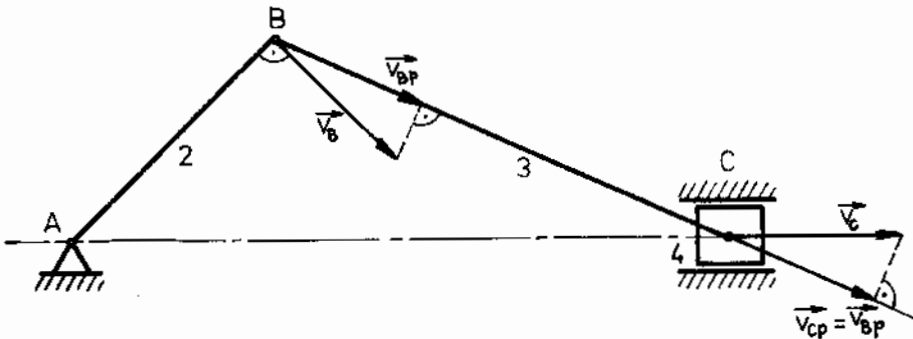
Bod C, jehož rychlost hledáme, leží na tělese 3. Pro použití přímé metody je nutné, abychom znali rychlost aspoň jednoho bodu tohoto tělesa. Je dána úhlová rychlost tělesa 2 (pohyb 21 je rotační) to znamená, že můžeme vypočítat rychlost jakéhokoliv bodu na tomto tělese. Spojení těles 2 a 3 je vytvořeno kloubem, bod B je společný oběma tělesům. Pro tento bod platí

$$v_B = \omega_{21} \cdot \overline{AB}$$

Určení rychlosti bodu C ve zvoleném měřítku provedeme třemi na sobě nezávislými metodami.

Řešení tuhostí úsečky, obr. 18.1.

Tuto metodu můžeme použít tehdy, jestliže uvažované body při pohybu tělesa (mechanizmu) nemění svoji vzdálenost - tvoří tuhou úsečku. Potom platí, že pravoúhlé průměty rychlostí do spojnice těchto bodů jsou stejné. V našem příkladě body

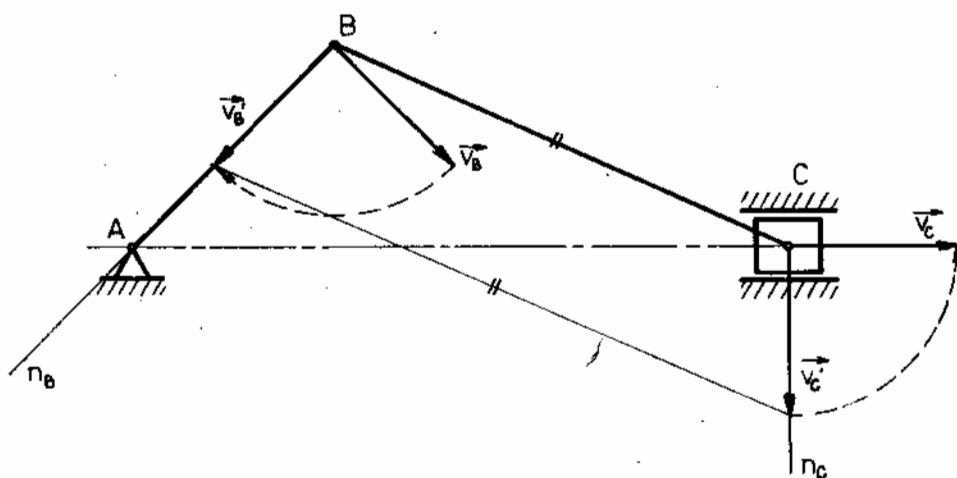


Obr. 18.1

B, C leží na tělese 3 a jejich spojnice tvoří tuhou úsečku. Pravoúhlý průmět rychlosti \vec{v}_{Bp} bodu B, do spojnice těchto bodů, je stejný jako pravoúhlý průmět rychlosti \vec{v}_{Cp} bodu C. Bod C je společný pro tělesa 3 a 4. Těleso 4 (píst) koná posuvný pohyb, známe tedy směr rychlosti bodu C.

Řešení pootočením rychlostí, obr. 18.2.

V principu se jedná o metodu tuhosti úsečky, avšak pracujeme s pootočenými rychlostmi. Tyto pootočené rychlosti budeme značit čárkou \vec{v}' . Rychlost bodu B pootočíme v libovolném smyslu o 90° , t. zn. do normály. Koncovým bodem pootočené rychlosti \vec{v}'_B vedeme rovnoběžku se spojnicí bodů B, C (tuhou úsečkou), která na normále bodu C vytne pootočenou rychlost \vec{v}'_C .



Obr. 18.2

Otočením rychlosti \vec{v}'_C o 90° v opačném smyslu, než byla otočena rychlost \vec{v}_B , obdržíme rychlost \vec{v}_C bodu C.

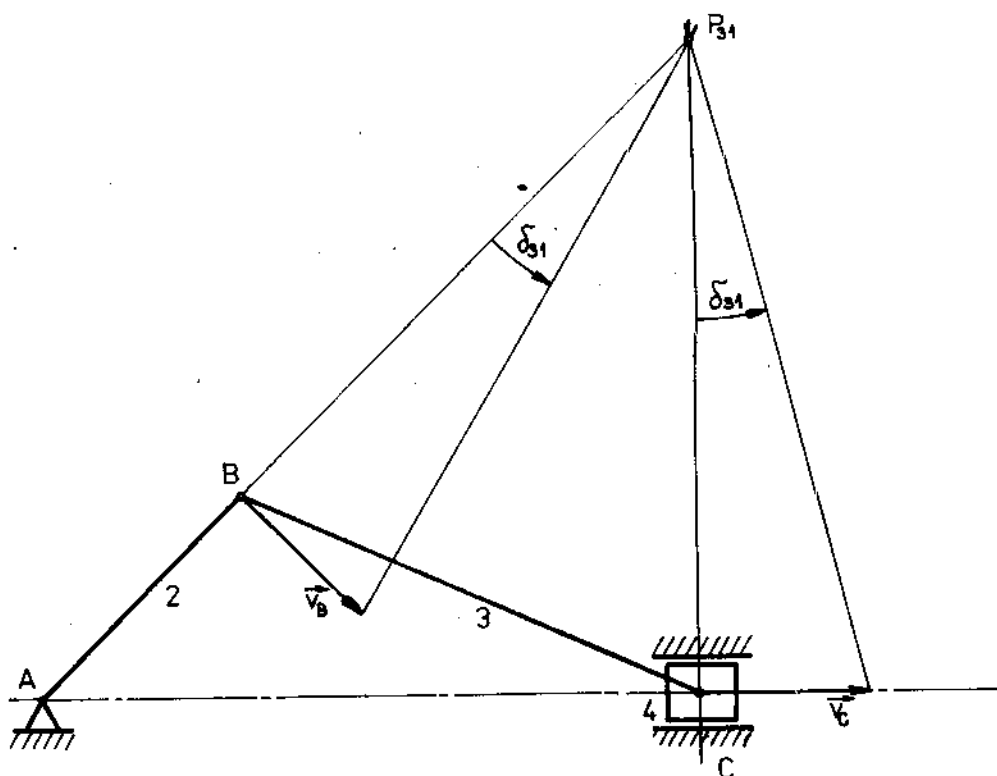
Řešení použitím okamžitého středu otáčení (metoda zorných úhlů), obr. 18.3.

Pro řešení rychlostí si pohyb 31, který je rovinný obecný, můžeme nahradit pohybem rotačním se středem rotace v okamžitém středu otáčení, pólu P_{31} . To znamená, že všechny body tělesa 3 pro danou (okamžitou) polohu rotují kolem osy kolmé na rovinu pohybu a procházející pólem. Spojnice libovolného bodu tělesa s pólem tvoří normálu tohoto bodu a jeho rychlost je na normálu kolmá. Protože platí $\vec{v}_B = \vec{v}_{21B} = \vec{v}_{31B}$ (rychlost \vec{v}_{21} bodu B je rovna rychlosti \vec{v}_{31} bodu B) a dále

$$\operatorname{tg} \delta_{31} = \frac{v_{31B}}{BP_{31}} = \omega_{31}$$

úhel δ_{31} je pro všechny body tělesa 3 stejný a někdy se nazývá zorný úhel. (jinými slovy je možné říci: rychlosti všech bodů tělesa jsou pod stejným zorným úhlem.)

Rychlost bodu C na obr. 18.3 určíme touto metodou následovně. Nakreslíme v měřítku rychlost \vec{v}_{31} bodu B t. j. rychlost \vec{v}_B , spojíme koncový bod této rychlosti s pólem P_{31} , který leží v průsečíku normál bodů B, C, čímž získáme úhel δ_{31} .

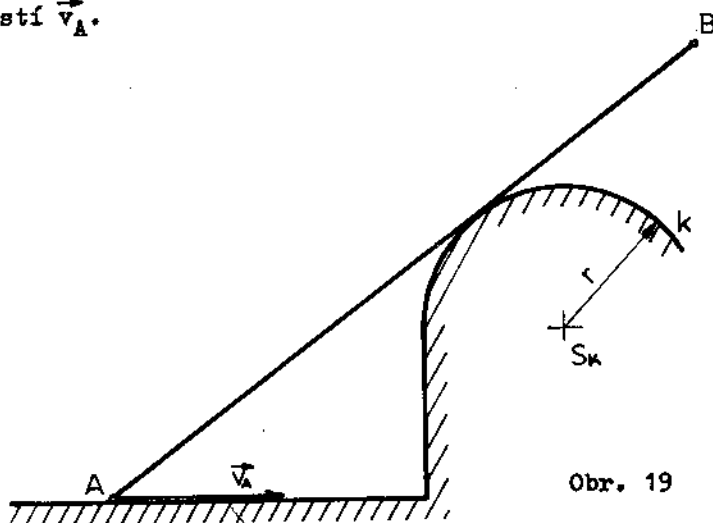


Obr. 18.3

Od normály bodu C nanese se ve stejném smyslu úhel δ_{31} a na kolmici k normále vztyčené v bodě C obdržíme rychlost \vec{v}_C .

Příklad 19.

Určete rychlost bodu B tělesa, znázorněného na obr. 19, jehož bod A se posouvá rychlostí \vec{v}_A .



Obr. 19

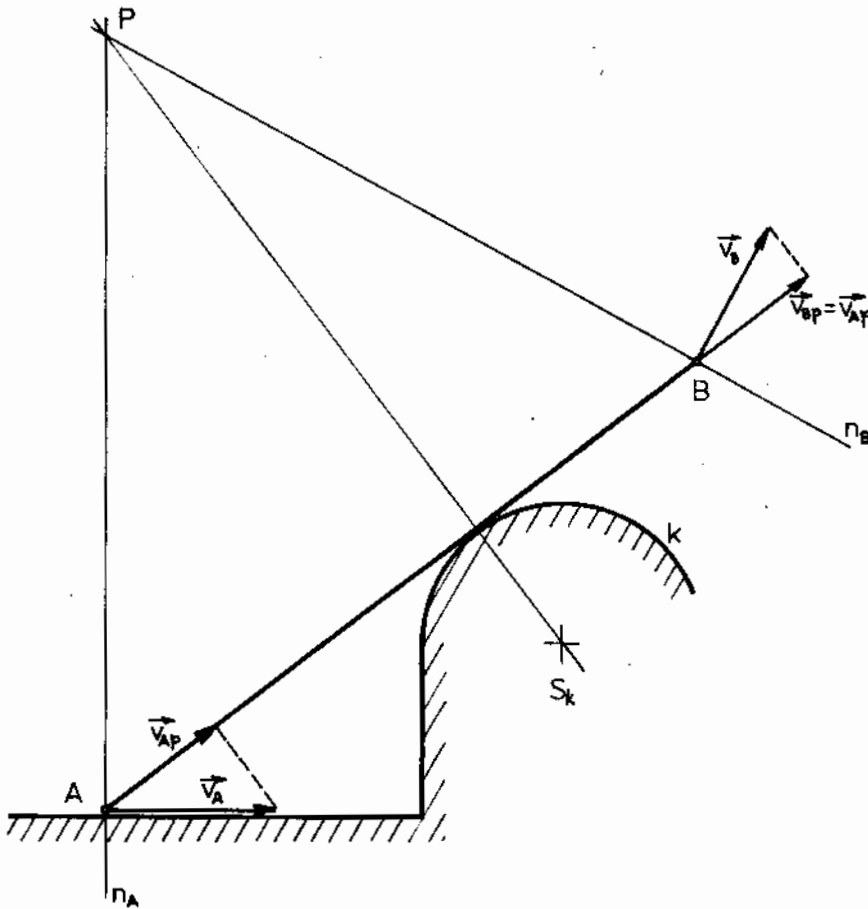
Řešení:

Z cvičných důvodů provedeme řešení postupně již uvedenými třemi přínými me-

točami.

Řešení tuhostí úsečky, obr. 19.1.

Tuhou úsečku tvoří spojnice bodů A, B. Rychlost \vec{v}_A promítneme do spojnice těchto bodů a obdržíme \vec{v}_{Ap} , stejnou rychlost \vec{v}_{Bp} musí mít bod B. Skutečná rychlost bodu B je kolmá na normálu n_B (spojnicí bodu B s pólem P).



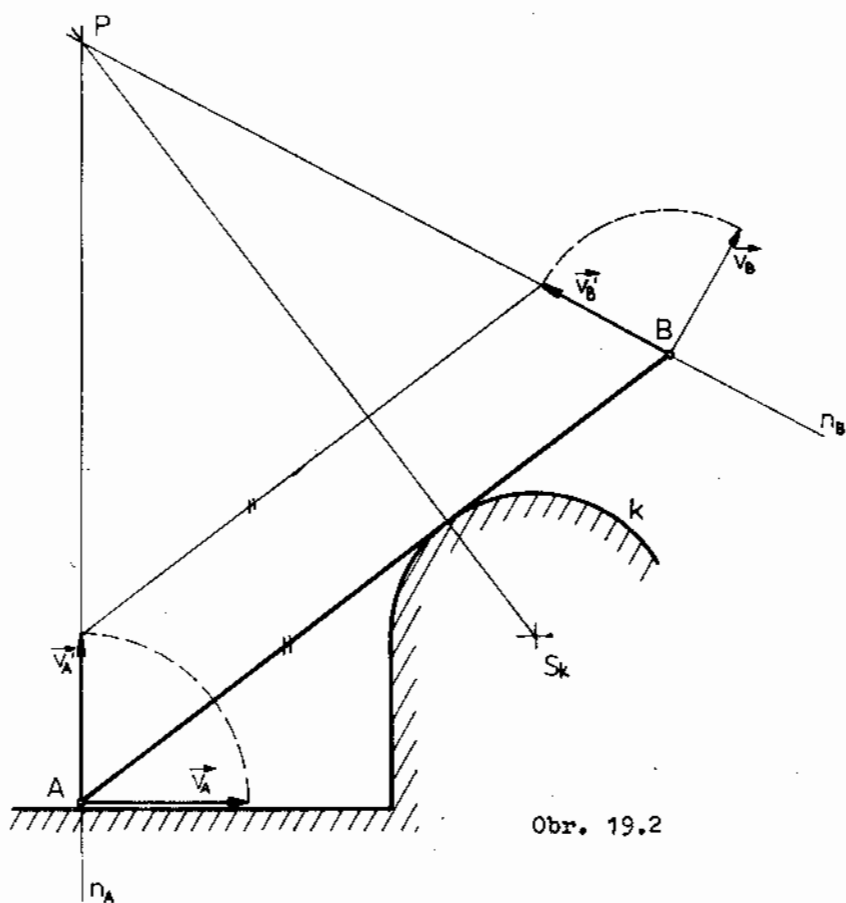
Obr. 19.1

Řešení pootočením rychlostí, obr. 19.2.

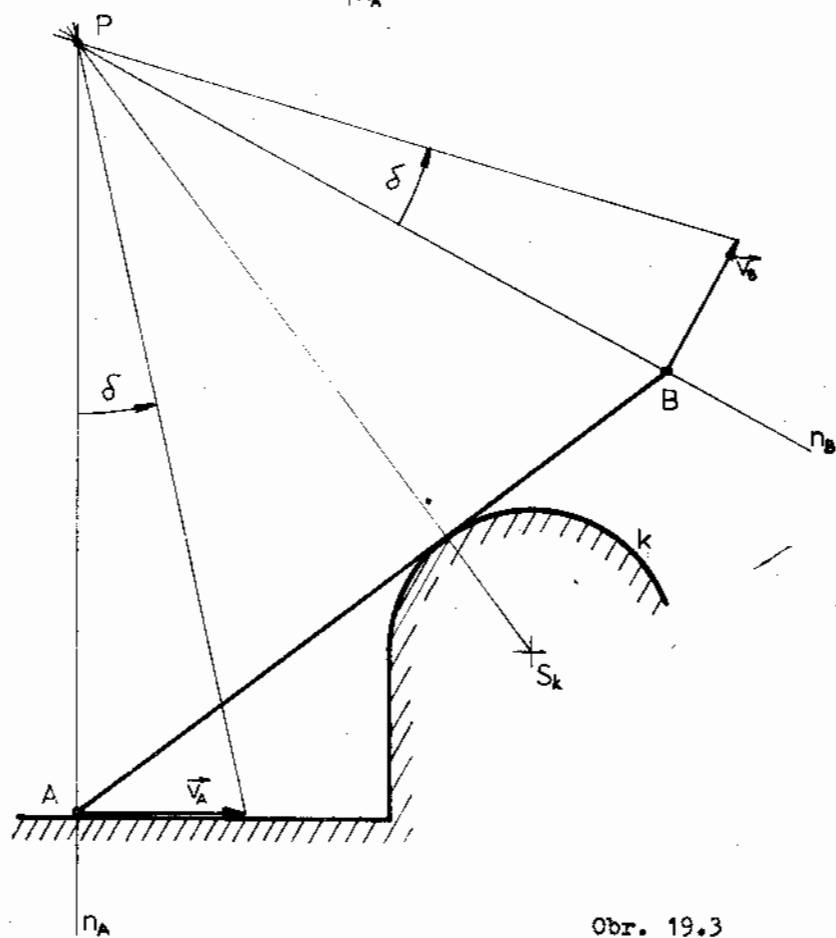
Rychlost \vec{v}_A otočíme o 90° , čímž obdržíme pootočenou rychlost \vec{v}_A^i . Koncovým bodem rychlosti \vec{v}_A^i vedeme rovnoběžku se spojnicí bodů A, B (tuhou úsečkou), která na normále n_B vytne pootočenou rychlost \vec{v}_B^i . Otočením této rychlosti o 90° v opačném smyslu obdržíme výslednou rychlost \vec{v}_B bodu B.

Řešení použitím okamžitého středu otáčení, obr. 19.3.

Sestrojíme pól P, který spojíme s koncovým bodem rychlosti \vec{v}_A . Úhel δ , mezi normálou n_A a touto spojnici, přeneseme od normály bodu B. Jeho druhé rameno vytíná na kolmici vztyčené v bodě B rychlost \vec{v}_B .



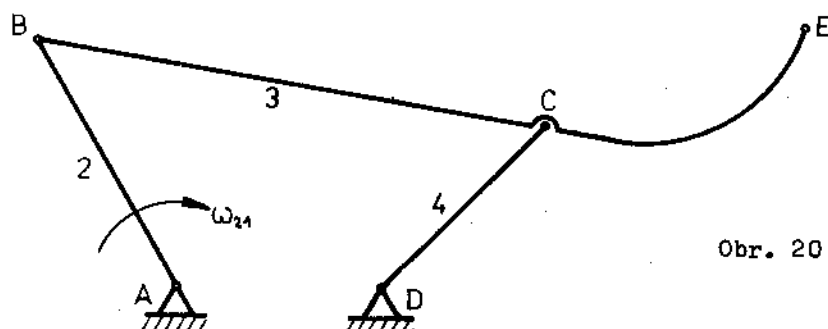
Obr. 19.2



Obr. 19.3

Příklad 20.

Vyšetřete rychlosti bodů C a E obráběče sena, jehož mechanismus je schematicky znázorněn na obr. 20. Je dána úhlová rychlost ω_{21} .



Obr. 20

Řešení:

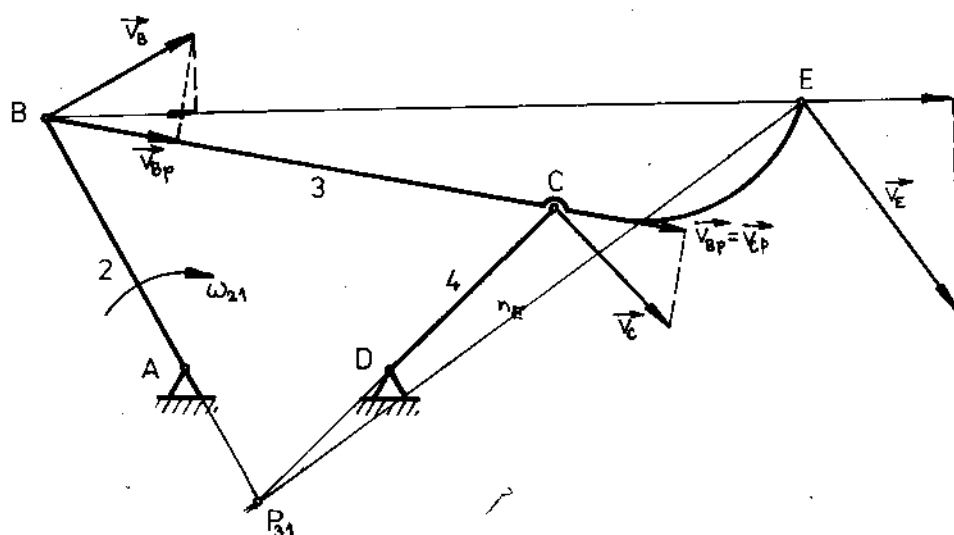
Body C a E leží na tělese 3, jenž koná obecný rovinný pohyb. Ze známé úhlové rychlosti ω_{21} vypočteme rychlost bodu B, který leží současně na tělesech 2 a 3. Platí

$$v_B = \omega_{21} \cdot \overline{AB}$$

Řešení provedeme postupně již uvedenými přímými metodami.

Řešení tuhostí úsečky, obr. 20.1.

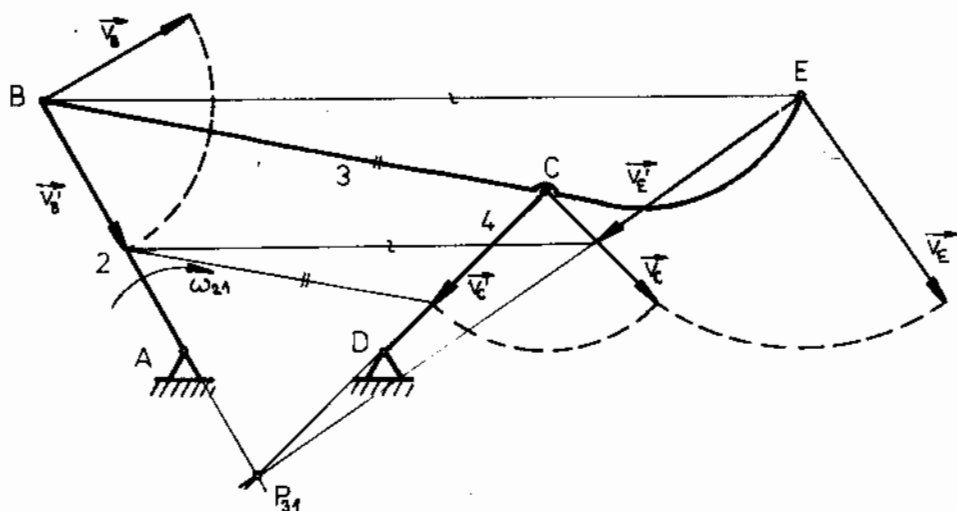
Pro určení rychlosti bodu C je tuhou úsečkou spojnice bodů B,C, výsledná rychlost je kolmá na člen 4 (normálu bodu C). Pro určení rychlosti bodu E je tuhou úsečkou spojnice bodů B,E, výsledná rychlost je kolmá na normálu n_E (spojnice bodu E s pólem P_{31}).



Obr. 20.1

Řešení pootočením rychlostí, obr. 20.2.

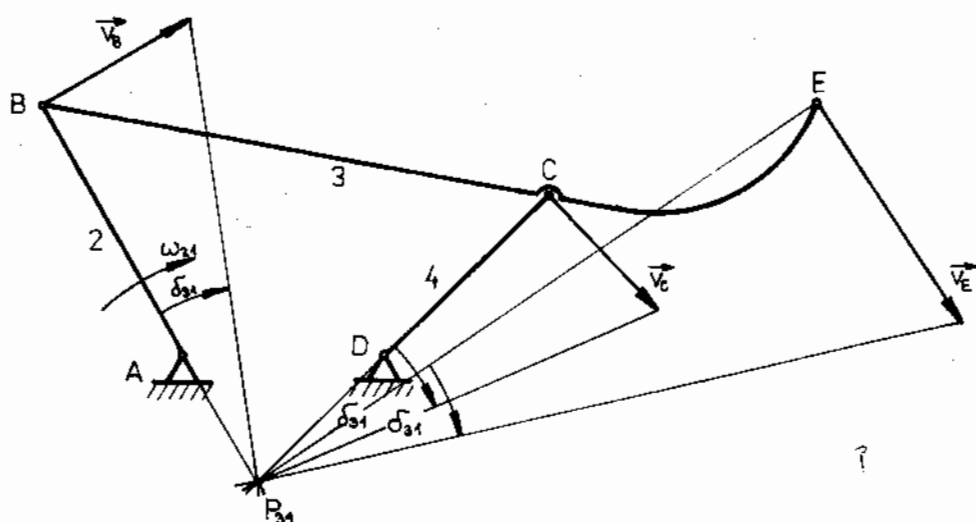
Rychlost \vec{v}_B otočíme o 90° a koncovým bodem pootočené rychlosti \vec{v}_B^i vedeme rovnoběžku se spojnicí bodů B,C a dále se spojnicí bodů B,E. Na normálách n_C , n_E obdržíme pootočené rychlosti \vec{v}_C^i , \vec{v}_E^i . Výsledné rychlosti \vec{v}_C , \vec{v}_E jsou otočeny o 90° .



Obr. 20.2

Řešení použitím okamžitého středu otáčení, obr. 20.3.

Koncový bod rychlosti \vec{v}_B spojíme s pólem P_{31} , čímž obdržíme úhel δ_{31} . Tento přeneseme od normál bodů C a E a na kolmicích normál obdržíme rychlosti \vec{v}_C , \vec{v}_E .



Obr. 20.3

5.0. Grafické metody řešení rychlostí a zrychlení

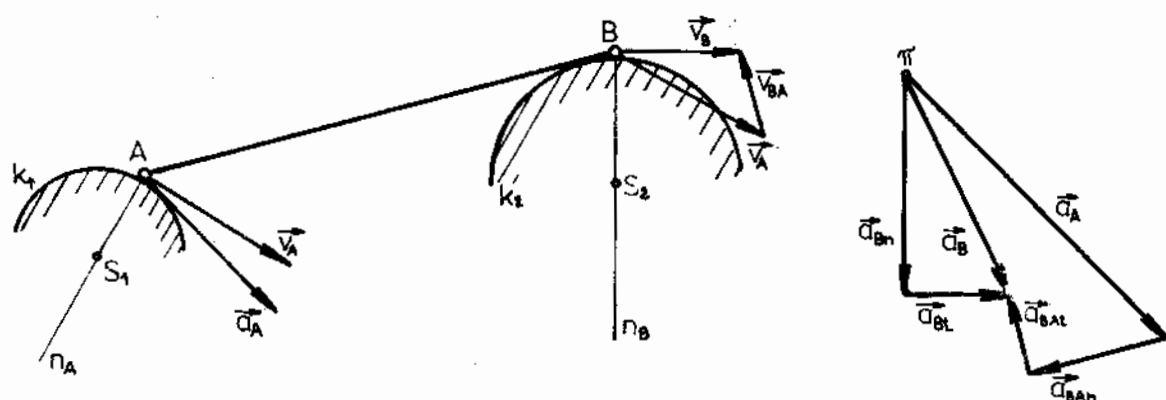
5.1. Řešení základním rozkladem pohybu

Příklad 21.

Určete graficky rychlost a zrychlení bodu B tělesa na obr. 21, které je vázáno tak, že má jeden stupeň volnosti. Bod A tělesa se pohybuje po kružnici k_2 rychlostí \vec{v}_A , zrychlením \vec{a}_A ; bod B po kružnici k_1 .

Řešení:

provedeme metodou základního rozkladu. Tato metoda není univerzální. Při řešení pohybu tělesa nebo rovinné soustavy ji můžeme použít když na řešeném těle se známe t.zv. referenční bod. Referenční bod je libovolný bod tělesa u kterého známe kinematické veličiny, t.j. rychlost a zrychlení. Princip metody základního rozkladu spočívá v tom, že rovinný pohyb tělesa rozložíme na dva současné pohyby, při čemž unášivý pohyb je posuvný a relativní rotační kolem referenčního bodu.



Obr. 21

V našem příkladu za referenční bod můžeme považovat bod A. Abychom mohli určit zrychlení je nutné nejdříve vyřešit rychlosti. Platí rozklad

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

Provedeme rozbor rovnice. U rychlosti \vec{v}_A známe směr i velikost, proto symbol \vec{v}_A podtrhneme šipkou. Relativní pohyb je rotační, je to pohyb bodu B vzhledem k referenčnímu bodu A, známe tedy nositelku příslušné rychlosti (kolmice na spojnici AB), symbol \vec{v}_{BA} podtrhneme. Pohyb bodu B je po kružnici k_1 , známe nositelku rychlosti, a proto symbol \vec{v}_B podtrhneme. V rovnici jsou jen dvě skalární neznámé (velikosti rychlostí \vec{v}_B , \vec{v}_{BA}), můžeme ve zvoleném měřítku sestavit trojúhelník rychlostí (obr. 21).

Dále napíšeme rovnici pro zrychlení. Platí

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_A$$

Při rozboru rovnice pro zrychlení postupujeme obdobně jako u rychlostí s tím rozdílem, že každé neznámé zrychlení uvažujeme zvlášť ve složce normálové a tečné. Rovnici tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{array}{c} \vec{a}_B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \underline{n} \quad \underline{t} \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{BA} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \underline{n} \quad \underline{t} \end{array} + \begin{array}{c} \vec{a}_A \\ \underline{t} \end{array}$$

Zrychlení bodu A je dáno, známe nositelku i velikost (podtrhneme šipkou). Velikost normálového zrychlení $\vec{a}_{BA n}$ vypočteme z rychlosti \vec{v}_{BA} použitím vztahu

$$a_{BA n} = \frac{v_{BA}^2}{AB}$$

Nositelkou zrychlení $\vec{a}_{BA n}$ je spojnice bodů A, B, zrychlení směřuje do středu křivosti (bod A - referenčního bodu), symbol $\vec{a}_{BA n}$ v rovnici podtrhneme šipkou. Tečná složka zrychlení $\vec{a}_{BA t}$ je kolmá na normálovou, symbol $\vec{a}_{BA t}$ podtrhneme. Velikost normálového zrychlení $\vec{a}_{B n}$ vypočteme ze vztahu

$$a_{B n} = \frac{v_B^2}{BS_2}$$

nositelkou tohoto zrychlení je spojnice bodů BS_2 , zrychlení směřuje do bodu S_2 . Zrychlení $\vec{a}_{B n}$ v rovnici podtrhneme šipkou. Tečné zrychlení $\vec{a}_{B t}$ je kolmé na normálové (na spojnici bodů BS_2), známe tedy nositelku ale neznáme velikost. Symbol $\vec{a}_{B t}$ podtrhneme.

V rovnici pro zrychlení jsou opět dvě neznámé skalární veličiny, velikosti zrychlení $\vec{a}_{BA t}$, $\vec{a}_{B t}$. Obrazec zrychlení je na obr. 21.

Příklad 22.

Určete zrychlení bodu B tyče, uložené ve dvou přímkových drážkách, bod A se pohybuje konstantní rychlostí \vec{v}_A . Tyč je schematicky znázorněna na obr. 22.

Řešení:

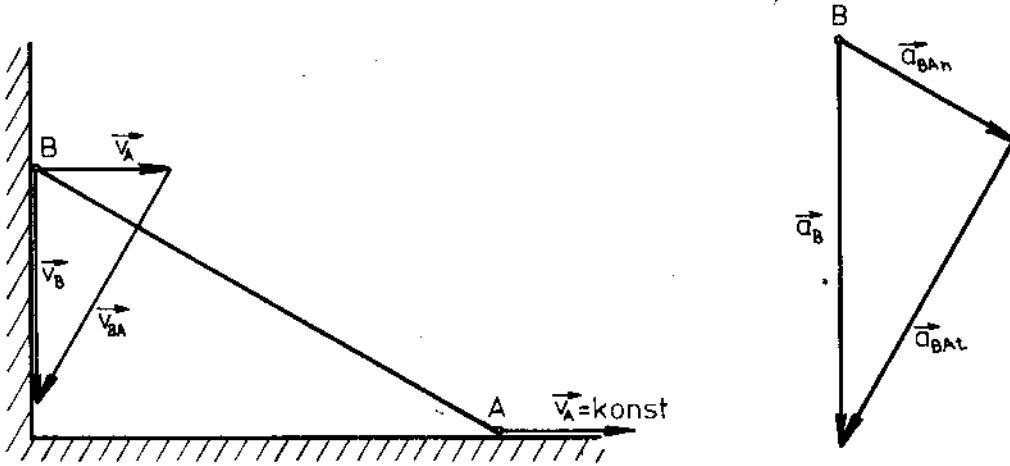
Body A, B přísluší jednomu tělesu, přitom známe rychlost a zrychlení jednoho bodu t.j. bodu A - referenčního bodu. Můžeme tedy k řešení použít metodu základního rozkladu.

Pro rychlosti platí

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

Bod A se pohybuje po přímce, známe nositelku i velikost rychlosti \vec{v}_A (symbol \vec{v}_A v rovnici podtrhneme šipkou). Při relativním pohybu B:A se bod B pohybuje po

kružnici se středem v bodě A, známe nositelku příslušné rychlosti (symbol \vec{v}_{BA} podtrhneme). Výsledným pohybem je pohyb bodu B, který je po přímce, známe tedy nositelku (symbol \vec{v}_B podtrhneme). V rovnici jsou dvě neznámé skalární veličiny,



Obr. 22

můžeme sestavit trojúhelník rychlostí, obr. 22.

Dále napíšeme rozklad pro zrychlení

$$\begin{array}{c} \vec{a}_B \\ | \\ \underline{t} \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{BA} \\ / \quad \backslash \\ \underline{n} \quad \underline{t} \end{array} + \begin{array}{c} \vec{a}_A \\ | \\ \underline{t=0} \end{array}$$

Bod A se pohybuje po přímce, bude mít zrychlení pouze ve směru pohybu. Protože tento pohyb je rovnoměrný ($\vec{v}_A = \text{konst.}$), je zrychlení nulové. Velikost normálového zrychlení \vec{a}_{BA_n} vypočteme ze vztahu

$$a_{BA_n} = \frac{v_{BA}^2}{BA}$$

nositelka tohoto zrychlení je spojnice bodů A, B, smysl je z B do A. Nositelka tečného zrychlení \vec{a}_{BA_t} je kolmá na spojnici bodů A, B.

Bod B koná pohyb po přímce, známe nositelku jeho zrychlení. Obrazec zrychlení je na obr. 22.

Příklad 23.

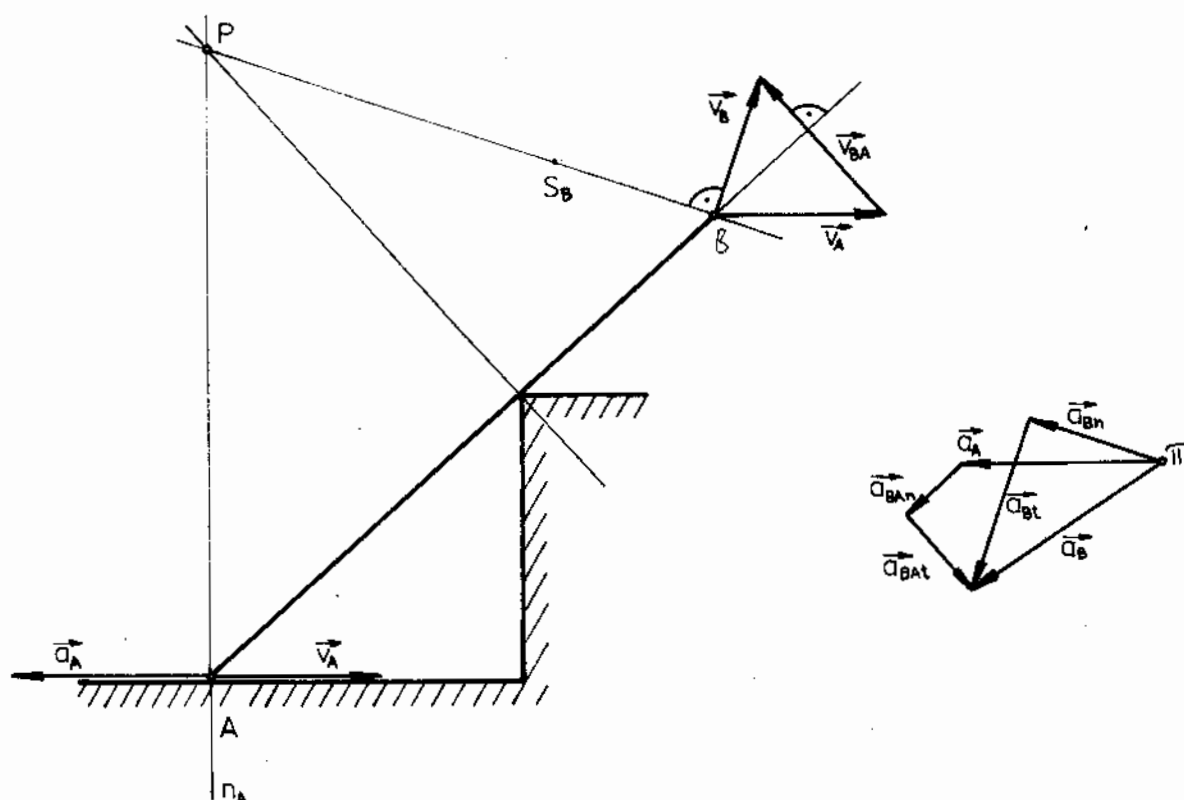
Určete zrychlení bodu B tyče, která je uložena tak, že bod A je veden v drážce a v druhém místě se smýká po hraně, obr. 23. Bod A se pohybuje rychlostí \vec{v}_A , zrychlením \vec{a}_A .

Řešení:

Bod B tyče vykonává obecný rovinný pohyb. Řešení provedeme metodou základního rozkladu, referenčním bodem je bod A. Pro rychlosti platí rovnice

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

Rychlost \vec{v}_A je dána, známe nositelku i velikost, pohyb B:A je rotace kolem referenčního bodu A, známe tedy nositelku rychlosti \vec{v}_{BA} . Výsledný pohyb bodu B je



Obr. 23

obecný, proto pro určení nositelky rychlosti \vec{v}_B musíme nejdříve určit pól P, který leží v průsečíku normál. Nositelka rychlosti \vec{v}_B je kolmá na normálu n_B . Obrázec rychlostí je na obr. 23.

Dále napíšeme rozklad pro zrychlení

$$\begin{array}{c} \vec{a}_B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{n} \quad \vec{t} \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{BA} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{n} \quad \vec{t} \end{array} + \vec{a}_A$$

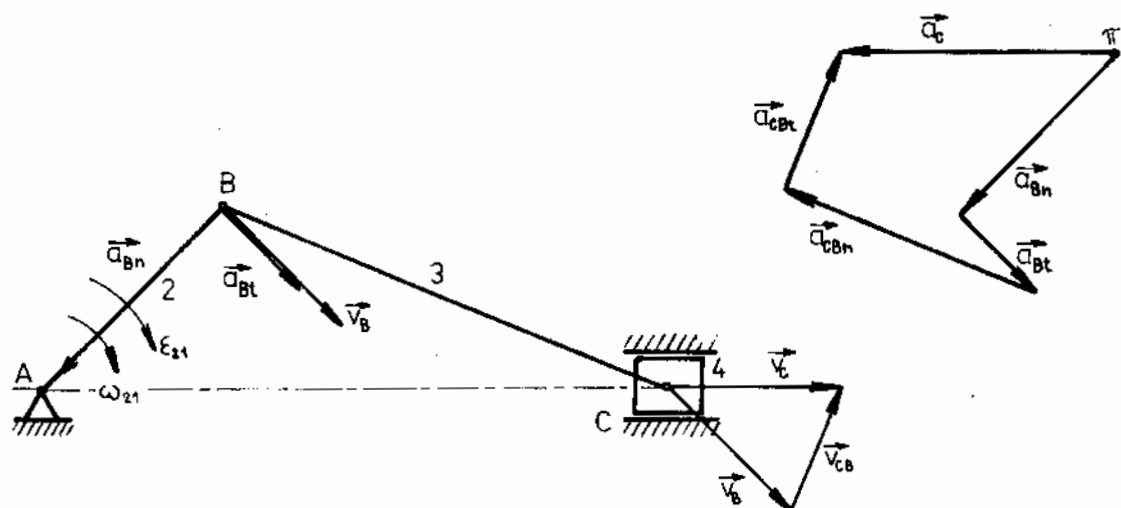
a provedeme rozbor rovnice. U zrychlení \vec{a}_A známe nositelku i velikost. Normálové zrychlení \vec{a}_{BAN} leží na spojnici bodů B, A a smysl zrychlení je z bodu B do referenčního bodu A (středu křivosti relativního pohybu), jeho velikost určíme ze

Příklad 24.

Určete rychlost a zrychlení pístu klikového mechanismu schematicky znázorněného na obr. 24. Je dána úhlová rychlost kliky ω_{21} a úhlové zrychlení ϵ_{21} .

Řešení:

Píst klikového mechanismu koná posuvný pohyb po přímce. To znamená, že pro určení rychlosti a zrychlení pístu můžeme vybrat libovolný bod pístu. Pro řešení metodou základního rozkladu bude vhodný bod C, protože tento bod leží současně na tělese 3, na němž jako referenční bod můžeme zvolit bod B u něhož známe rychlost a zrychlení ze zadaných veličin členu 2. V principu tedy budeme řešit obecný ro-



Obr. 24

vinný pohyb tělesa 3:1. Nejdříve vypočteme rychlost a zrychlení referenčního bodu B. Pro rychlost platí

$$v_B = \omega_{21} \cdot \overline{AB}$$

pro složky zrychlení

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{\overline{AB}}; \quad a_{Bt} = \epsilon_{21} \cdot \overline{AB}$$

Pro rychlosti použijeme rozklad

$$\underline{\vec{v}_C} = \underline{\vec{v}_{CB}} + \underline{\vec{v}_B}$$

U rychlosti \vec{v}_B známe nositelku i velikost, u rychlosti \vec{v}_{CB} pouze nositelku (kolmice na spojnici bodů C, B), u rychlosti \vec{v}_C nositelku (bod C koná posuvný pohyb po přímce). Obrazec rychlostí je na obr. 24.

Pro zrychlení platí rovnice

$$\underline{\vec{a}_C} = \underline{\vec{a}_{CB}} + \underline{\vec{a}_B}$$

Z rozboru rovnice plyne: u složek zrychlení \vec{a}_{Bn} , \vec{a}_{Bt} známe nositelky i velikosti, můžeme použít též výsledné zrychlení

$$|\vec{a}_B| = \sqrt{a_{Bn}^2 + a_{Bt}^2}$$

velikost normálového zrychlení \vec{a}_{CBn} vypočteme ze vztahu

$$a_{CBn} = \frac{v_{CB}^2}{CB}$$

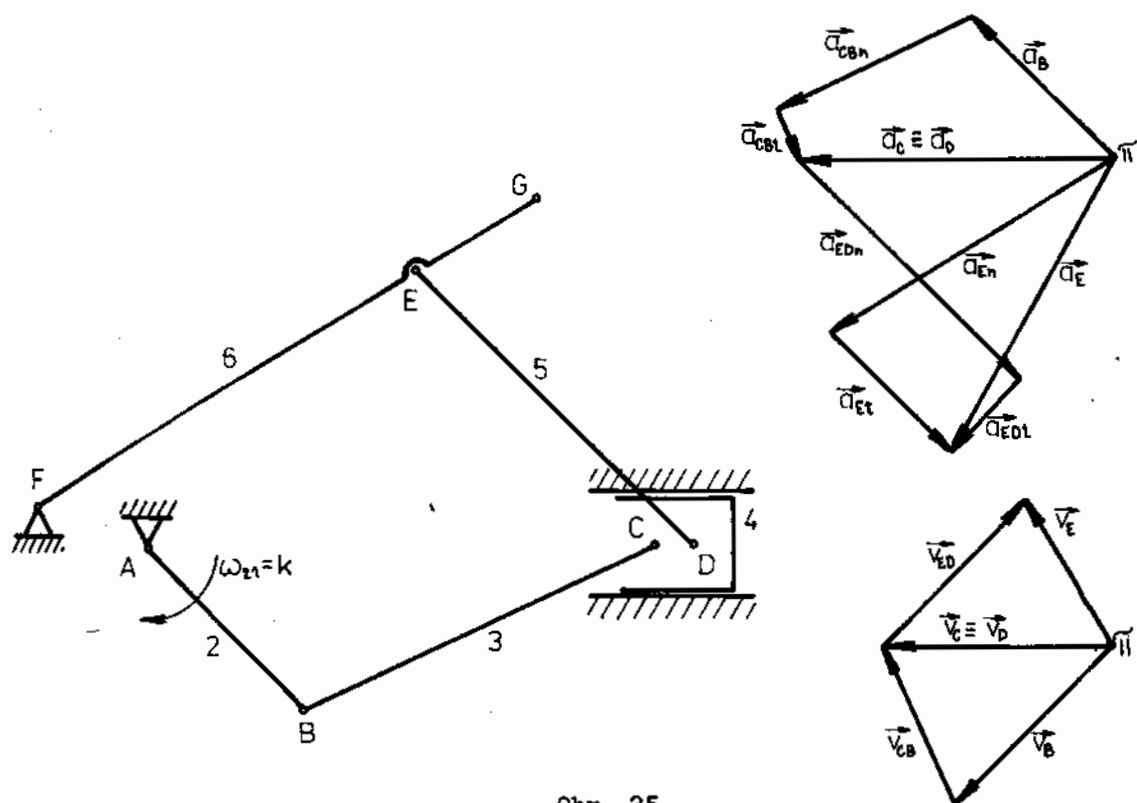
nositelka leží na spojnici bodů C, B, smysl zrychlení je z bodu C do B. Nositelka tečné složky zrychlení \vec{a}_{CBt} je kolmá na normálu, spojnici bodů C, B. Pohyb bodu C je po přímce, zrychlení \vec{a}_C bude pouze ve směru pohybu, známe nositelku. Obrazec zrychlení je na obr. 24.

Příklad 25.

Určete rychlost a zrychlení bodu G, ležícího na tělese 6, mechanismu příhrnovače lisu na slámu, jehož schema je na obr. 25. Pohyb mechanismu je způsoben pohonem kliky (tělesa 2), od níž je odvozen pohyb ostatních těles. Je dána úhlová rychlost kliky $\omega_2 = \text{konst.}$

Řešení:

provedeme metodou základního rozkladu. Řešit přímo pohyb bodu G touto metodou nelze, proto musíme postupně vyřešit rychlosti a zrychlení bodů C, D, E a G.



Obr. 25

Nejdříve vypočteme rychlost a zrychlení bodu B, který je referenčním bodem pro těleso 3, platí

$$v_B = \omega_{21} \cdot AB ; \quad a_{Bn} = \frac{v_B^2}{AB} ; \quad a_{Bt} = 0 \text{ neboť } \omega_{21} = \text{konst.}$$

Rychlost bodu C určíme z rozkladu

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_B$$

u rychlosti \vec{v}_B známe velikost i nositelku, \vec{v}_{CB} - nositelku (kolmá na spojnici bodů C,B), \vec{v}_C - nositelku (ve směru pohybu bodu C).

Pro zrychlení bodu C platí

$$\begin{array}{c} \vec{a}_C \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{CB} \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} + \vec{a}_B$$

zrychlení \vec{a}_B známe, velikost zrychlení \vec{a}_{CBn} vypočteme ze vztahu

$$a_{CBn} = \frac{v_{CB}^2}{CB}$$

nositelka leží na spojnici bodů C,B a zrychlení směřuje do referenčního bodu B, \vec{a}_{CBt} - nositelka je kolmá na spojnici bodů C,B, \vec{a}_C - známe nositelku, neboť bod C koná posuvný pohyb po přímce.

Protože těleso 4 koná posuvný pohyb, jsou rychlosti a zrychlení všech bodů tělesa stejné. Platí

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D ; \quad \vec{a}_C = \vec{a}_D.$$

Dále můžeme řešit rychlost a zrychlení bodu E ležícího na tělese 5, u něhož volíme za referenční bod bod D. Pro rychlosti platí rovnice

$$\vec{v}_E = \vec{v}_{ED} + \vec{v}_D$$

u rychlosti \vec{v}_D známe nositelku i velikost, \vec{v}_{ED} - nositelku (kolmice na ED), \vec{v}_E - nositelku (kolmice na EF).

Pro zrychlení platí

$$\begin{array}{c} \vec{a}_E \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{ED} \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} + \vec{a}_D$$

u zrychlení \vec{a}_D známe nositelku i velikost. Velikost normálové složky zrychlení \vec{a}_{EDn} vypočteme ze vztahu

$$a_{EDn} = \frac{v_{ED}^2}{ED}$$

nositelka leží na spojnici bodů E,D, zrychlení směřuje do referenčního bodu D.

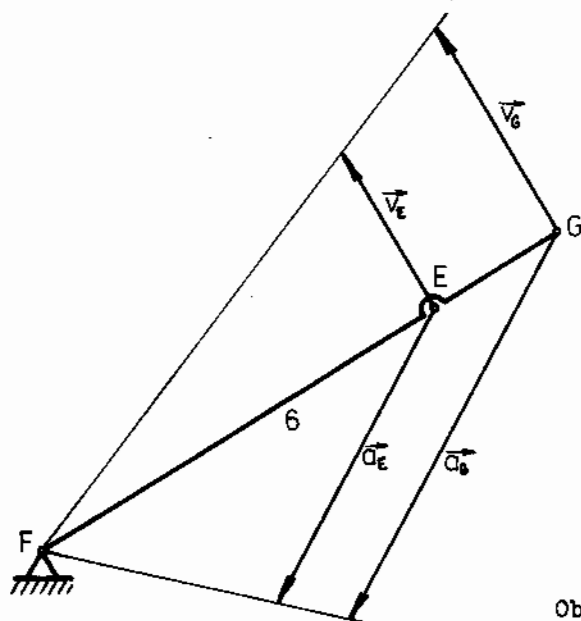
Tečná složka zrychlení \vec{a}_{EDt} je kolmá na normálové zrychlení, známe nositelku. Velikost normálového zrychlení \vec{a}_{En} vypočteme ze vztahu

$$a_{En} = \frac{v_E^2}{EF}$$

nositelka je kolmá na spojnici bodů EF, zrychlení směřuje do středu křivosti t.j. bodu F. Tečná složka zrychlení \vec{a}_{Et} je kolmá na normálové zrychlení, známe nositelku.

~~Obrazce~~ rychlostí a zrychlení jsou na obr. 25. Bod G leží na tělese 6, které vykonává rotační pohyb kolem bodu F. Určení rychlosti a zrychlení bodu G můžeme provést více způsoby, např.:

- a) použitím základního rozkladu, referenčním bodem bude bod E,
- b) ze známé rychlosti a známého zrychlení bodu E vypočteme úhlovou rychlost a úhlové zrychlení tělesa 6 a z nich vypočteme rychlost a zrychlení bodu G,
- c) z rychlosti a zrychlení bodu E, na základě podobnosti trojúhelníků, graficky určíme rychlost a zrychlení bodu G, obr. 25.1.



Obr. 25.1

5.2. Řešení rozkladem pohybů

Příklad 26.

Vyšetřete rychlost a zrychlení bodu D čtyřčlenného čtyřkloubového mechanismu schematicky znázorňeného na obr. 26. Je dána úhlová rychlost ω_2 , a úhlové zrychlení ε_2 .

Řešení:

provedeme metodou rozkladu, přestože pro tento příklad by bylo jednodušší použít metodu základního rozkladu. Metoda rozkladu je univerzální, používáme ji při řešení soustav. V případě, že ji chceme použít při řešení jednoho tělesa (sa-

mostatného nikoliv v soustavě), je nutné nakreslit náhradní mechanismus. Je-li při rozkladu unášivý pohyb rotační nebo obecný, pak se v rovnici pro zrychlení vyskytuje ještě zrychlení Coriolisovo (proto některá literatura uvádí název této metody jako Coriolisova metoda).

V dané soustavě budeme řešit pohyb těles 3:1. Proto pro řešení použijeme rozklad pohybů

$$31 = 32 + 21$$

Tato rovnice platí obecně pro pohyb libovolného bodu tělesa 3. Nás však zajímá bod D, proto provedeme označení D, to znamená, že od tohoto okamžiku všechny rovnice platí pouze pro bod D.

Je nutné si uvědomit, že výsledný (obecný) pohyb 3:1 jsme rozložili na dva současné pohyby 3:2 a 2:1. Bod D tedy při uvedeném rozkladu vykonává tři různé pohyby. Při pohybu 2:1 jako by ležel na tělese 2 a vykonával rotační pohyb kolem bodu A (pohyb 2:1 je rotace kolem bodu A), při pohybu 3:2 jako by ležel na tělese 3 a vykonával rotační pohyb kolem bodu B (pohyb 3:2 je rotace kolem bodu B) a při pohybu 3:1 (skutečný - výsledný pohyb) leží na tělese 3 a vykonává pohyb vzhledem k základnímu tělesu 1 (rámu).

Pro rychlost bodu D platí

$$\vec{v}_{31D} = \vec{v}_{32D} + \vec{v}_{21D}$$

neboli, jak již bylo řečeno

$$\underline{\underline{D}} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$$

Z rozboru rovnice plyne: U rychlosti \vec{v}_{21} známe velikost, která je dána vztahem

$$v_{21} = \omega_{21} \cdot \overline{AD}$$

(bod D při pohybu 2:1 koná rotaci kolem bodu A), její nositelka je kolmá na spojnici bodů AD. U rychlosti \vec{v}_{32} známe nositelku (bod D při pohybu 3:2 koná rotaci kolem bodu B), tato je kolmá na spojnici bodů BD. U rychlosti \vec{v}_{31} známe rovněž nositelku, která je kolmá na normálu bodu D, t.j. spojnici bodů DE. Grafické řešení rychlostí je na obr. 26.

Pro zrychlení bodu D platí rozklad

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{32} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_{Cor}$$

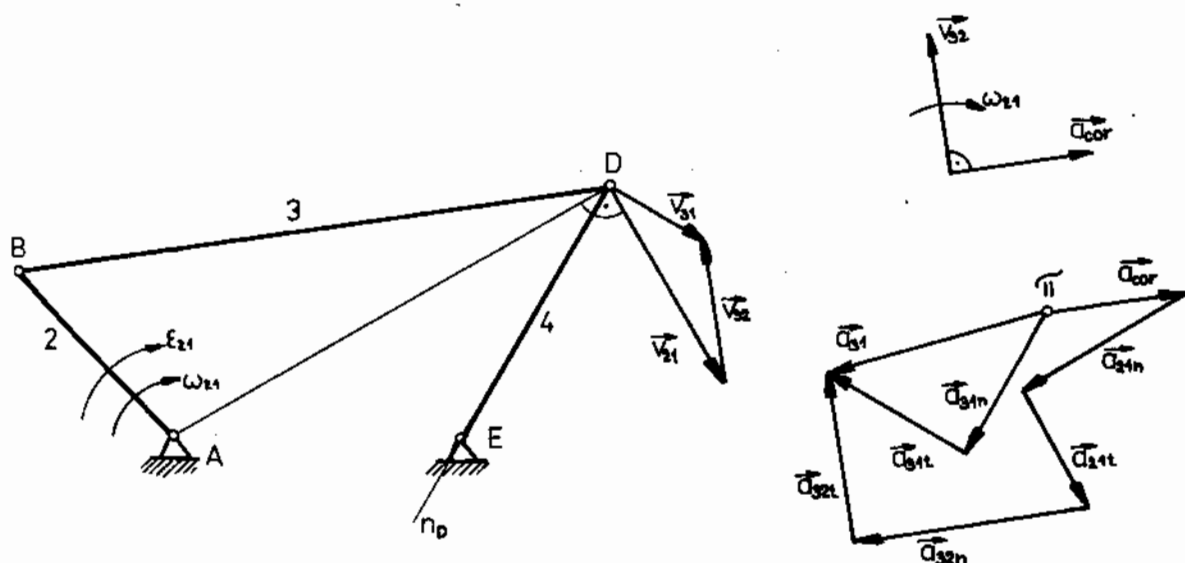
Unášivý pohyb je rotační, proto se v rovnici vyskytuje Coriolisovo zrychlení. Zrychlení v této rovnici (mimo Coriolisova) rozložíme na normálové a tečné složky

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a}_{31} & = & \vec{a}_{32} & + & \vec{a}_{21} & + & \vec{a}_{Cor} \\ \swarrow \searrow & & \swarrow \searrow & & \swarrow \searrow & & \rightarrow \\ n & t & n & t & n & t & \end{array}$$

a provedeme rozbor rovnice. Velikost Coriolisova zrychlení vypočteme ze vztahu

$$a_{\text{Cor}} = 2 \cdot \omega_{21} \cdot v_{32}$$

Směr a smysl Coriolisova zrychlení určíme graficky otočením vektoru relativní rychlosti \vec{v}_{32} o 90° ve směru unášivé úhlové rychlosti ω_{21} , obr. 26. (Z uvedeného plyne, že u Coriolisova zrychlení vždy známe velikost a nositelku zrychlení).



Obr. 26

Velikost normálové složky zrychlení \vec{a}_{21n} vypočteme

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{AD}$$

nositelka leží na spojnici bodů DA, zrychlení směřuje do bodu A (středu křivosti při pohybu 2:1). Tečnou složku zrychlení \vec{a}_{21t} vypočteme ze vztahu

$$a_{21t} = \varepsilon_{21} \cdot AD$$

nositelka je kolmá na normálové zrychlení, smysl určuje ε_{21} .

Velikost zrychlení \vec{a}_{32n} vypočteme

$$a_{32n} = \frac{v_{32}^2}{BD}$$

nositelka leží na spojnici bodů DB, smysl zrychlení je z bodu D do B (bod B je středem křivosti při pohybu 3:2). Tečná složka \vec{a}_{32t} je kolmá na normálové zrychlení, známe nositelku.

Velikost \vec{a}_{31n} vypočteme

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{DE}$$

nositelka leží na spojnici bodů DE, smysl zrychlení je z bodu D do bodu E (bod D má při pohybu 3:1 střed křivosti v bodě E). Tečná složka zrychlení \vec{a}_{31t} je kolmá na normálovou, známe nositelku.

V rovnici pro zrychlení jsou neznámé jen dvě skalární veličiny, proto můžeme sestavit obrazec zrychlení, který je na obr. 26.

Příklad 27.

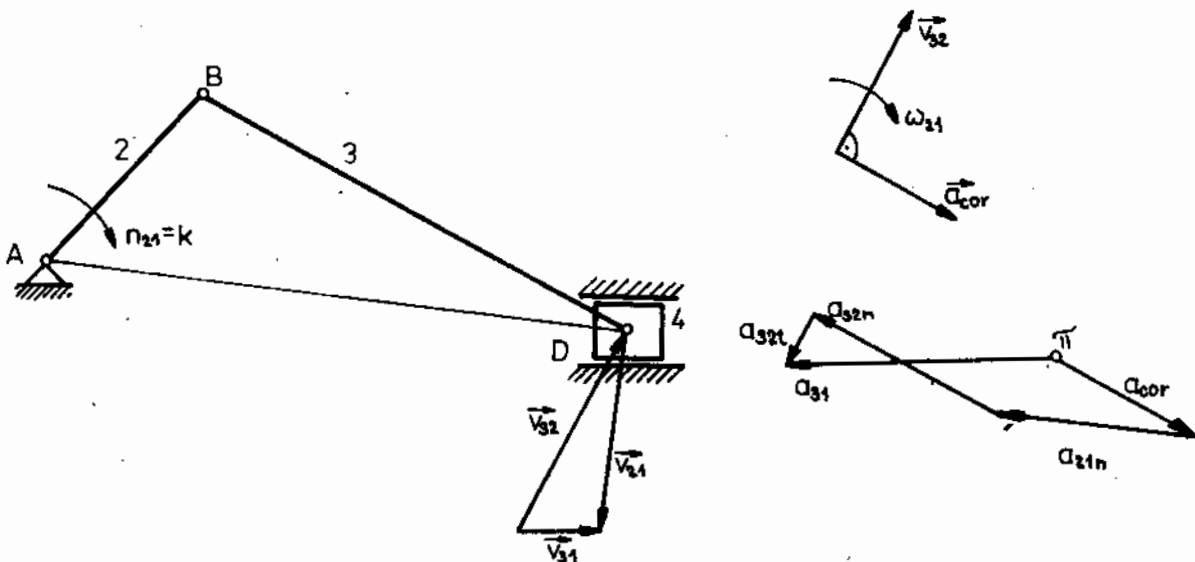
Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení pístu excentrického klikového mechanismu znázorněného na obr. 27, klika se otáčí konstantními otáčkami n_{21} .

Řešení:

provedeme metodou rozkladu pohybů. Nejdříve z otáček n_{21} vypočteme úhlovou rychlost ω_{21} . Platí

$$\omega_{21} = \frac{\pi \cdot n_{21}}{30}$$

Pohyb pístu je translační, proto k určení rychlosti a zrychlení pístu stačí určit rychlost a zrychlení jednoho libovolného bodu pístu. Vhodným bodem je bod D, který je společný pro tělesa 3 a 4.



Obr. 27

Pro rychlosti bodu D platí rozklad

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$$

Velikost rychlosti \vec{v}_{21} vypočteme ze vztahu: $v_{21} = \omega_{21} \cdot \overline{AD}$,

nositelka rychlosti je kolmá na spojnici bodů AD (při unášivém pohybu 21 bod D koná rotační pohyb kolem bodu A).

Při relativním pohybu koná bod D rotační pohyb kolem bodu B (pohyb 32 je rotace kolem bodu B), známe tedy nositelku rychlosti \vec{v}_{32} , která je kolmá na spojnici bodů DB. Výsledný pohyb bodu D je translační (bod D leží též na tělese 4, které koná vzhledem k rámu translační pohyb po přímce), platí $\vec{v}_{31D} = \vec{v}_{41D}$, takže známe nositelku rychlosti \vec{v}_{31} .

Trojúhelník rychlostí je na obr. 27.

Pro zrychlení bodu D platí rozklad

$$\vec{a}_{31} = \underbrace{\vec{a}_{32}}_n + \underbrace{\vec{a}_{21}}_t + \vec{a}_{Cor}$$

Velikost Coriolisova zrychlení vypočteme ze vztahu

$$a_{Cor} = 2 \omega_{21} \cdot v_{32}$$

směr a smysl určíme tak, že vektor relativní rychlosti \vec{v}_{32} otočíme o 90° ve smyslu unášivé úhlové rychlosti ω_{21} , obr. 27.

Velikost normálové složky zrychlení \vec{a}_{21n} vypočteme

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{DA}$$

nositelka zrychlení leží na spojnici bodů DA, zrychlení směřuje do bodu A (středu křivosti při pohybu 21). Velikost tečné složky zrychlení $\vec{a}_{21t} = 0$, neboť $\epsilon_{21} = 0$. Velikost normálového zrychlení \vec{a}_{32n} vypočteme

$$a_{32n} = \frac{v_{32}^2}{BD}$$

nositelka leží na spojnici bodů DB, zrychlení směřuje do bodu B (středu křivosti pohybu 32). Tečná složka zrychlení \vec{a}_{32t} je kolmá na normálovou, známe nositelku. Výsledný pohyb bodu D je translační, proto zrychlení \vec{a}_{31} bude jen ve směru pohybu, známe nositelku. Obrazec zrychlení je na obr. 27.

Poznámka:

Při řešení klikového mechanismu spalovacího motoru většinou postupujeme opačně než v příkladu 27, známe rychlost a zrychlení pístu a řešíme úhlovou rychlost a úhlové zrychlení kliky. Toto řešení je v příkladu 28.

Příklad 28

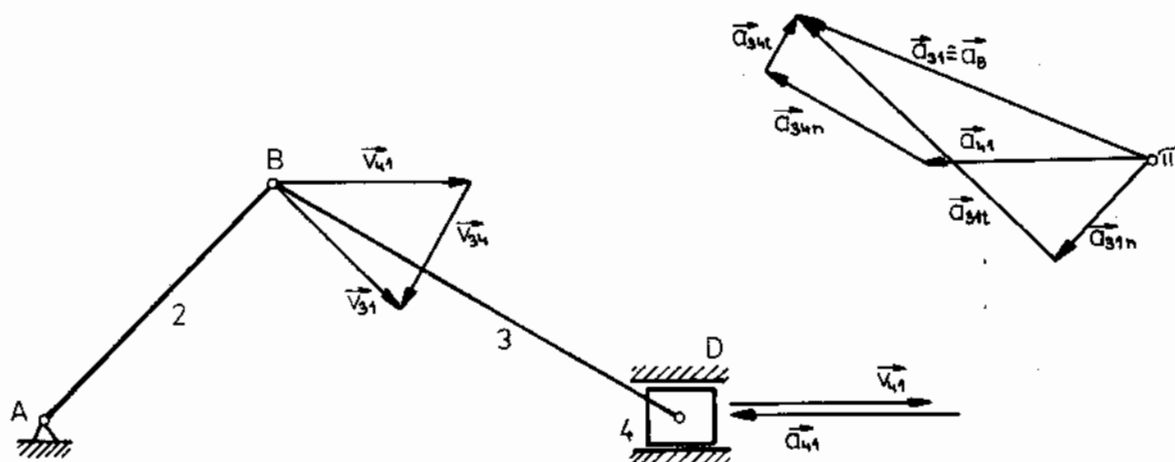
Vyšetřete úhlovou rychlost a úhlové zrychlení kliky klikového mechanismu, jsou-li dány rychlost a zrychlení pístu \vec{v}_{41} , \vec{a}_{41} , obr. 28.

Řešení:

provedeme obdobně jako v příkladu 27 metodou rozkladu. Úkolem je vyšetřit pohyb kliky, proto řešení provedeme pro bod B, který je společný tělesům 2 a 3. Pro rychlost bodu B platí rozklad

$$\underline{B} \quad \underline{\vec{v}_{31}} = \underline{\vec{v}_{34}} + \underline{\vec{v}_{41}}$$

Trojúhelník rychlostí je na obr. 28.



Obr. 28

Dále řešíme zrychlení, platí rozklad

$$\begin{array}{c} \vec{a}_{31} \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{34} \\ / \quad \backslash \\ n \quad t \end{array} + \vec{a}_{41}$$

Unášivý pohyb 41 je translační, t.zn., že Coriolisovo zrychlení se v rovnici nevyskytuje. Z rozboru rovnice plyne: Zrychlení \vec{a}_{41} známe, velikosti normálových složek \vec{a}_{34n} , \vec{a}_{31n} vypočteme

$$a_{34n} = \frac{v_{34}^2}{DB}; \quad a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{BA}$$

jejich nositelky známe. Nositelky tečných složek zrychlení rovněž známe - jsou kolmé na normálová zrychlení. Obrazec zrychlení je na obr. 28.

Protože $\vec{v}_{31B} \equiv \vec{v}_{21B}$, $\vec{a}_{31Bt} \equiv \vec{a}_{21Bt}$, vypočteme úhlovou rychlost a úhlové zrychlení kliky ze vztahů

$$\omega_1 = \frac{v_{31}}{AB}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_{31t}}{AB}$$

Poznámka:

Příklady 26, 27, 28 je možné řešit též metodou základního rozkladu, toto řešení je jednodušší.

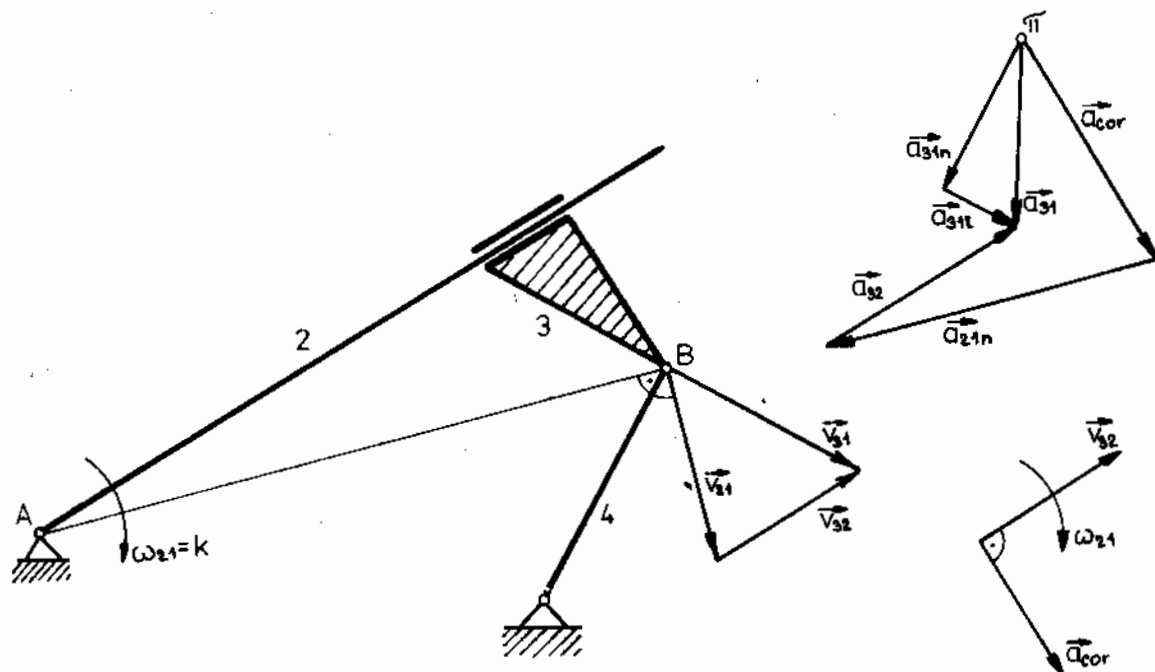
V dalších příkladech si ukážeme rovinné soustavy při jejichž řešení nelze použít metodu základního rozkladu (jsou to soustavy se smykadly - neznáme referenční bod).

Příklad 29.

Určete úhlovou rychlost ω_4 , a úhlové zrychlení ϵ_4 , členu 4 výstředníkového mechanismu, schematicky znázorněného na obr. 29. Je dána úhlová rychlost $\omega_2 = \text{konst.}$

Řešení:

Bod B je společný pro tělesa 3 a 4, t.zn., že pro stanovení ω_4 , ϵ_4 stačí vyřešit rychlost a zrychlení bodu B ležícího na tělese 3. Poněvadž je zadána úhlová rychlost tělesa 2 a mezi tělesy 2 a 3 je smykadlo (není společný bod), neznáme rychlost ani zrychlení žádného bodu tělesa 3, nelze k řešení použít metodu základního rozkladu. Proto použijeme metodu rozkladu pohybů.



Obr. 29

Pro rychlost bodu B platí rozklad

$$\underline{B} \quad \underline{v_{31}} = \underline{v_{32}} + \underline{v_{21}}$$

Z rozboru rovnice plyne: Velikost rychlosti \vec{v}_{21} vypočteme ze vztahu

$$v_{21} = \omega_{21} \cdot \overline{AB}$$

nositelka rychlosti je kolmá na spojnici bodů AB (pohyb 21 je rotace tělesa 2 kolem bodu A, při tomto myšleném pohybu bod B leží na tělese 2 a otáčí se kolem bodu A). U relativní rychlosti \vec{v}_{32} známe nositelku, která je rovnoběžná s tělesem 2 (pohyb 32 je posuvný, při tomto pohybu bod B leží na tělese 3 a vzhledem k tělesu 2 vykonává posuvný pohyb). U výsledné rychlosti \vec{v}_{31} známe nositelku, která je kolmá na spojnici bodů BD (bod B leží též na tělese 4, které koná rotační pohyb kolem bodu D). Trojúhelník rychlostí je na obr. 29.

Dále napíšeme rozklad pro zrychlení

$$\begin{array}{c} \vec{a}_{31} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{a}_{31n} \quad \vec{a}_{31t} \end{array} = \vec{a}_{32} + \begin{array}{c} \vec{a}_{21} \\ \downarrow \\ \vec{a}_{21n} \end{array} + \vec{a}_{Cor}$$

Velikost Coriolisova zrychlení vypočteme ze vztahu

$$a_{Cor} = 2 \omega_{21} \cdot v_{32}$$

směr a smysl obdržíme pootočením relativní rychlosti \vec{v}_{32} o 90° ve smyslu unášivé úhlové rychlosti ω_{21} . Velikost zrychlení \vec{a}_{21n} vypočteme

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{AB}$$

nositelka leží na spojnici bodů AB, zrychlení směřuje do bodu A. Tečná složka zrychlení \vec{a}_{21t} je nulová, neboť $\omega_{21} = \text{konst.}$ Pohyb 32 je posuvný, nositelka zrychlení \vec{a}_{32} je ve směru pohybu (rovnoběžka s tělesem 2). Velikost \vec{a}_{31n} vypočteme

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{BD}$$

nositelka zrychlení leží na spojnici bodů BD, zrychlení směřuje do bodu D. Nositelka tečné složky zrychlení \vec{a}_{31t} je kolmá na normálovou \vec{a}_{31n} . Obrazec zrychlení je na obr. 29.

Úhlovou rychlost ω_{41} a úhlové zrychlení ε_{41} vypočteme

$$\omega_{41} = \frac{v_B}{BD}; \quad \varepsilon_{41} = \frac{a_{Bt}}{BD}$$

neboť $\vec{v}_{31} \equiv \vec{v}_B$, $\vec{a}_{31t} \equiv \vec{a}_{Bt}$.

Příklad 30.

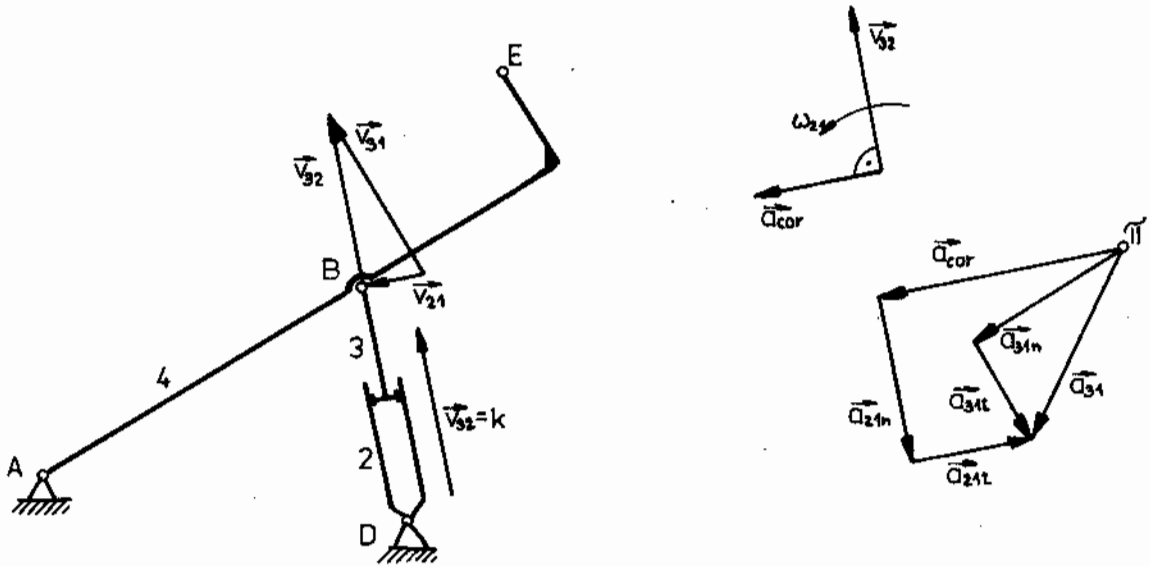
Určete rychlost a zrychlení bodu E valníku sklápěče, schematicky nakresleného na obr. 30, který je zvedán hydraulickým válcem. Rychlost pístu hydraulického válce \vec{v}_{32} je konstantní.

Řešení:

provedeme metodou rozkladu pohybů. Protože bod B je společný pro tělesa 3 a 4, určíme nejdříve rychlost a zrychlení tohoto bodu. Pro rychlost bodu B platí rozklad

$$\underline{B} \quad \underline{\vec{v}_{31}} = \underline{\vec{v}_{32}} + \underline{\vec{v}_{21}}$$

Rychlost \vec{v}_{32} známe (velikost i nositelku), rychlost \vec{v}_{21} je kolmá na spojnici bodů BD (známe nositelku), rychlost \vec{v}_{31} je kolmá na spojnici bodů AB (známe nositelku). Obrazec rychlostí je na obr. 30.



Obr. 30

Pro zrychlení platí rovnice

$$\begin{array}{c} \vec{a}_{31} \\ \swarrow \searrow \\ n \quad t \end{array} = \begin{array}{c} \vec{a}_{32} \\ \parallel \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} \vec{a}_{21} \\ \swarrow \searrow \\ n \quad t \end{array} + \begin{array}{c} \vec{a}_{Cor} \\ \rightarrow \end{array}$$

Velikost Coriolisova zrychlení určíme ze vztahu

$$a_{Cor} = 2 \omega_{21} \cdot v_{32}$$

při čemž

$$\omega_{21} = \frac{v_{21}}{BD}$$

směr a smysl \vec{a}_{Cor} určíme dle obr. 30. Velikost \vec{a}_{21n} vypočteme

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{BD}$$

nositelka leží na spojnici bodů BD, zrychlení směřuje do bodu D. Tečná složka zrychlení \vec{a}_{21t} je na normálovou kolmá (známe nositelku). Pohyb 32 je translační, rychlost \vec{v}_{32} je konstantní, zrychlení relativního pohybu \vec{a}_{32} je tedy nulové. Velikost zrychlení \vec{a}_{31n} vypočteme

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{AB}$$

nositelka leží na spojnici bodů AB, zrychlení směřuje do bodu A. Tečná složka zrychlení \vec{a}_{31t} je kolmá na normálovou (známe nositelku).

Zrychlení a rychlost bodu E můžeme určit graficky na základě známé rychlosti a zrychlení bodu B (viz příklad 25, obr. 25.1), nebo počtetně. Platí

$$\vec{v}_{31} \equiv \vec{v}_B ; \quad \vec{a}_{31t} \equiv \vec{a}_{Bt} ; \quad \vec{a}_{31n} \equiv \vec{a}_{Bn}$$

$$\omega_{41} = \frac{v_B}{AB} ; \quad \varepsilon_{41} = \frac{a_{Bt}}{AB} ; \quad |\vec{a}_B| = \sqrt{a_{Bn}^2 + a_{Bt}^2}$$

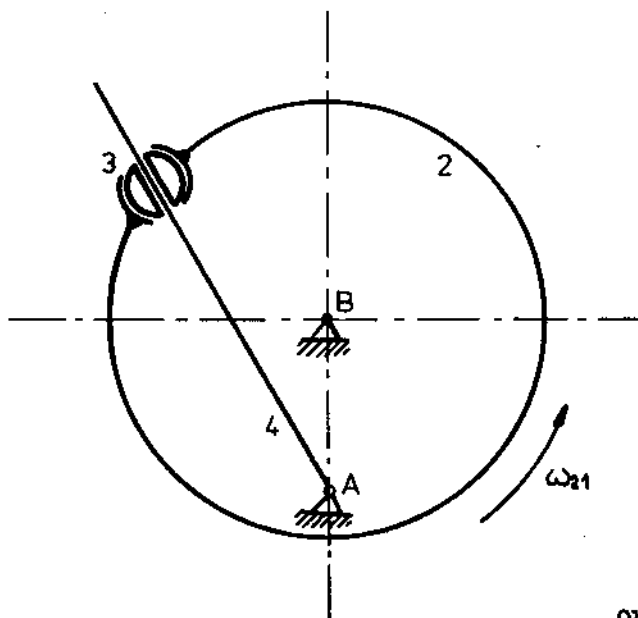
a dále

$$v_E = \omega_{41} \cdot \overline{AE}$$

$$a_{Et} = \varepsilon_{41} \cdot \overline{AE} ; \quad a_{En} = \frac{v_E^2}{AE} ; \quad |\vec{a}_E| = \sqrt{a_{En}^2 + a_{Et}^2}$$

Příklad 31.

Schematické provedení podávacího bubnu na žacím valu sklízecích mlátiček a

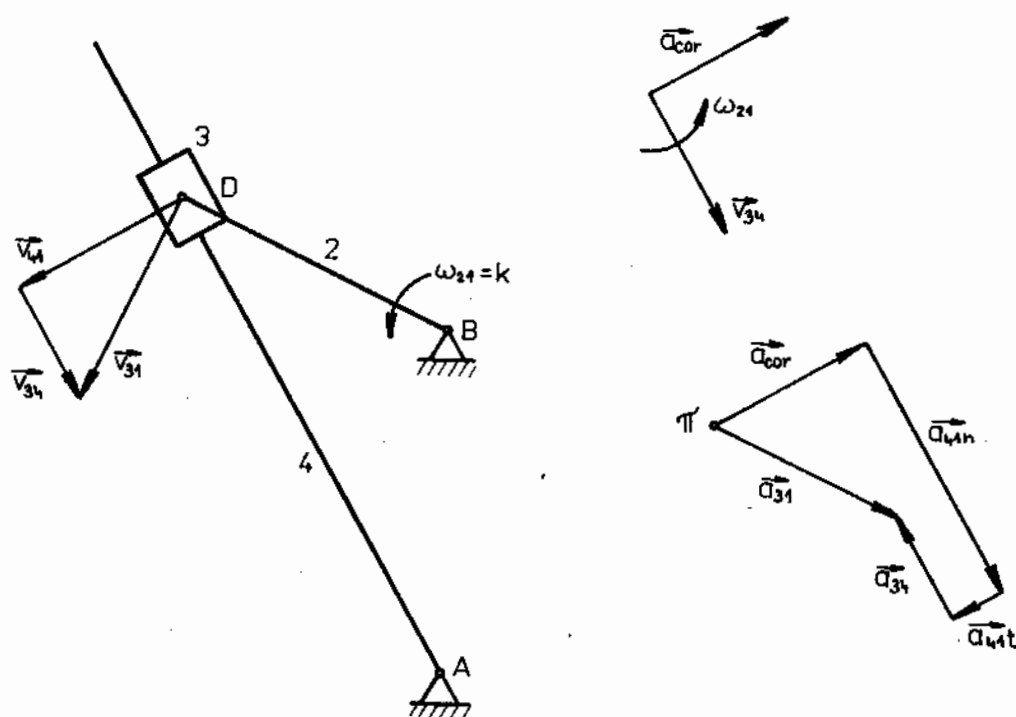


řezaček je na obr. 31. Buben rotuje kolem bodu A, kloub B je přestavitelný a lze jím měnit v dané poloze velikost vysunutí palců. Náhradní mechanismus (kinematické schéma) pro vyšetřování rychlosti a zrychlení je na obr. 31.1. Určete ω_{41} , ε_{41} tělesa 4, pro danou polohu mechanismu, jestliže se buben otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω_{21} .

Řešení:

Pro určení úhlové rychlosti a úhlového zrychlení tělesa 4 musíme znát rychlost a zry-

Obr. 31



Obr. 31.1

chlení nějakého bodu tohoto tělesa. Bod D leží současně na tělesech 2 a 3, obr. 31.1. Pro bod D platí

$$\begin{aligned}\vec{v}_{21D} &= \vec{v}_{31D}; & v_{21D} &= \omega_{21} \cdot \overline{BD} \\ \vec{a}_{21D} &= \vec{a}_{31D}; & a_{21Dn} &= \frac{v_{21D}^2}{\overline{DB}}; & a_{21Dt} &= 0, \text{ neboť } \varepsilon_{21} = 0\end{aligned}$$

tedy

$$\vec{a}_{21Dn} = \vec{a}_{21D}$$

Nyní známe rychlost a zrychlení bodu D ležícího na tělese 3 a můžeme napsat rozklad pohybů, při němž se vyskytuje člen 4

$$31 = 34 + 41$$

V tomto rozkladu bod D vykonává tři myšlené pohyby. Při pohybu 31 leží na tělese 3 a koná výsledný pohyb vzhledem k rámu, při pohybu 34 leží na tělese 3 a koná relativní pohyb vzhledem k tělesu 4 a při pohybu 41 leží na tělese 4 a koná unášivý pohyb vzhledem k rámu.

Pro rychlost bodu D platí

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{34} + \vec{v}_{41}$$

Rychlost \vec{v}_{31} známe, pohyb 34 je translační, nositelka rychlosti \vec{v}_{34} bude rovnoběžná se členem 4, pohyb 41 je rotační, nositelka rychlosti \vec{v}_{41} je kolmá na spojnici bodů DA.

Pro zrychlení bodu D platí

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{34} + \underbrace{\vec{a}_{41}}_{\substack{n \\ t}} + \vec{a}_{Cor}$$

Velikost \vec{a}_{Cor} vypočteme ze vztahu

$$a_{Cor} = 2 \omega_{41} \cdot v_{34}$$

přičemž $\omega_{41} = \frac{v_{41}}{DA}$, směr a smysl určíme otočením rychlosti \vec{v}_{34} o 90° ve smyslu úhlové rychlosti ω_{41} . Velikost normálového zrychlení \vec{a}_{41} vypočteme z rychlosti \vec{v}_{41} , platí

$$a_{41n} = \frac{v_{41}^2}{DA}$$

nositelka leží na spojnici bodů DA, zrychlení směřuje do bodu A (středu křivosti při pohybu 41). Tečná složka zrychlení \vec{a}_{41t} je kolmá na normálové zrychlení \vec{a}_{41n} , známe nositelku. Pohyb 34 je translační, nositelka zrychlení \vec{a}_{34} je ve směru pohybu. Zrychlení \vec{a}_{31} známe. Obrazec zrychlení je na obr. 31.1.

Úhlovou rychlost ω_{41} jsme již určili, úhlové zrychlení vypočteme z tečné složky zrychlení \vec{a}_{41t}

$$\varepsilon_{41} = \frac{a_{41t}}{DA}$$

Poznámka:

Při řešení tohoto příkladu jsme použili rozklad, ve kterém výsledný pohyb 31 je obecný, Toto není nutné, proto řešení provedeme ještě jednou použitím rozkladu

$$41 = 43 + 31$$

kde výsledný pohyb je rotační, relativní translační a unášivý obecný, obr. 31.2.

Pro rychlost bodu D platí

$$\vec{v}_{41} = \vec{v}_{43} + \vec{v}_{31}$$

Rychlost \vec{v}_{31} známe, u rychlostí \vec{v}_{43} , \vec{v}_{41} známe nositelky. Trojúhelník rychlostí je na obr. 31.2 (obrazec je stejný jako na obr. 31.1).

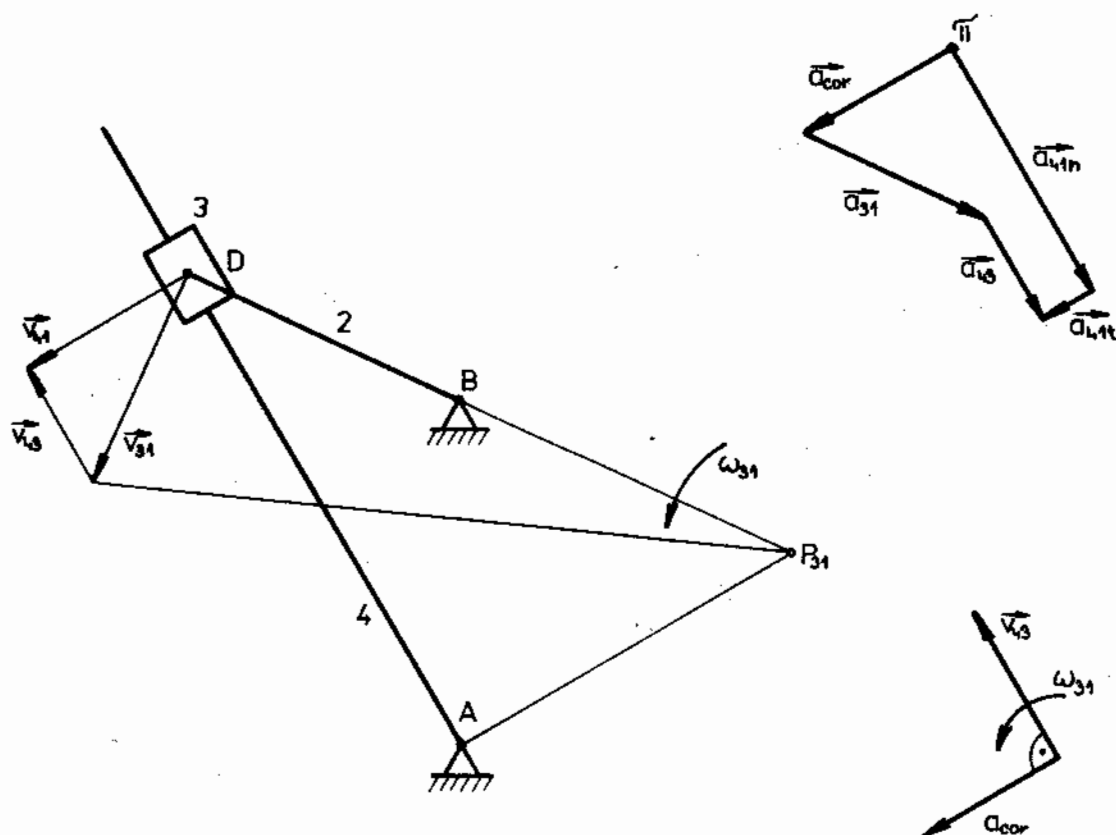
Pro zrychlení bodu D platí

$$\vec{a}_{41} = \vec{a}_{43} + \vec{a}_{31} + \vec{a}_{Cor}$$

$\underbrace{\quad}_{n} \quad \underbrace{\quad}_{t}$

V tomto rozkladu bude jiný vztah pro Coriolisovo zrychlení, neboť unášivý pohyb je 31

$$a_{Cor} = 2 \omega_{31} \cdot v_{43}$$



Obr. 31.2

Relativní rychlost \vec{v}_{43} známe, úhlovou rychlost ω_{31} vypočteme ze vztahu

$$\omega_{31} = \frac{v_{31}}{DP_{31}}$$

Příklad 32.

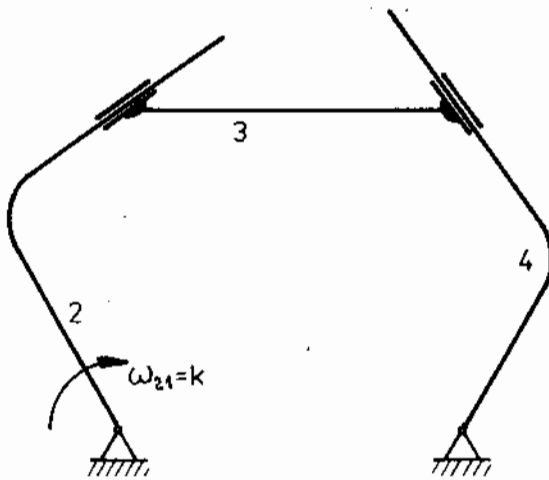
Vyšetřete úhlovou rychlost ω_4 a úhlové zrychlení ε_4 Oldhamovy křížové spojky, jejíž kinematické schéma pro určitou polohu je na obr. 32. Je dána úhlová rychlost $\omega_1 = \text{konst.}$

Řešení:

Oldhamova spojka se nejčastěji používá k propojení rovnoběžných ne zcela souosých hřídelů, např. spojení vstřikovacího čerpadla s hnacím hřídelem.

Naším úkolem je určit úhlovou rychlost a úhlové zrychlení tělesa 4, jestliže jsou dány kinematické veličiny tělesa 2. Mezi tělesy 2 a 3 ani 3 a 4 není společný bod, obr. 32. Pro řešení použijeme metodu rozkladu pohybů, neboť metodu základního rozkladu nelze použít.

Na tělese 3 si zvolíme libovolný bod, např. bod D (obr. 32.1). Pro pohyb bodu D napíšeme dva rozklady



Obr. 32

$$31 = 32 + 21$$

$$31 = 34 + 41$$

při kterých tento bod vykonává pět myšlených pohybů 3:1, 3:2, 2:1, 3:4, 4:1.

Rychlost bodu D na základě prvního rozkladu bude

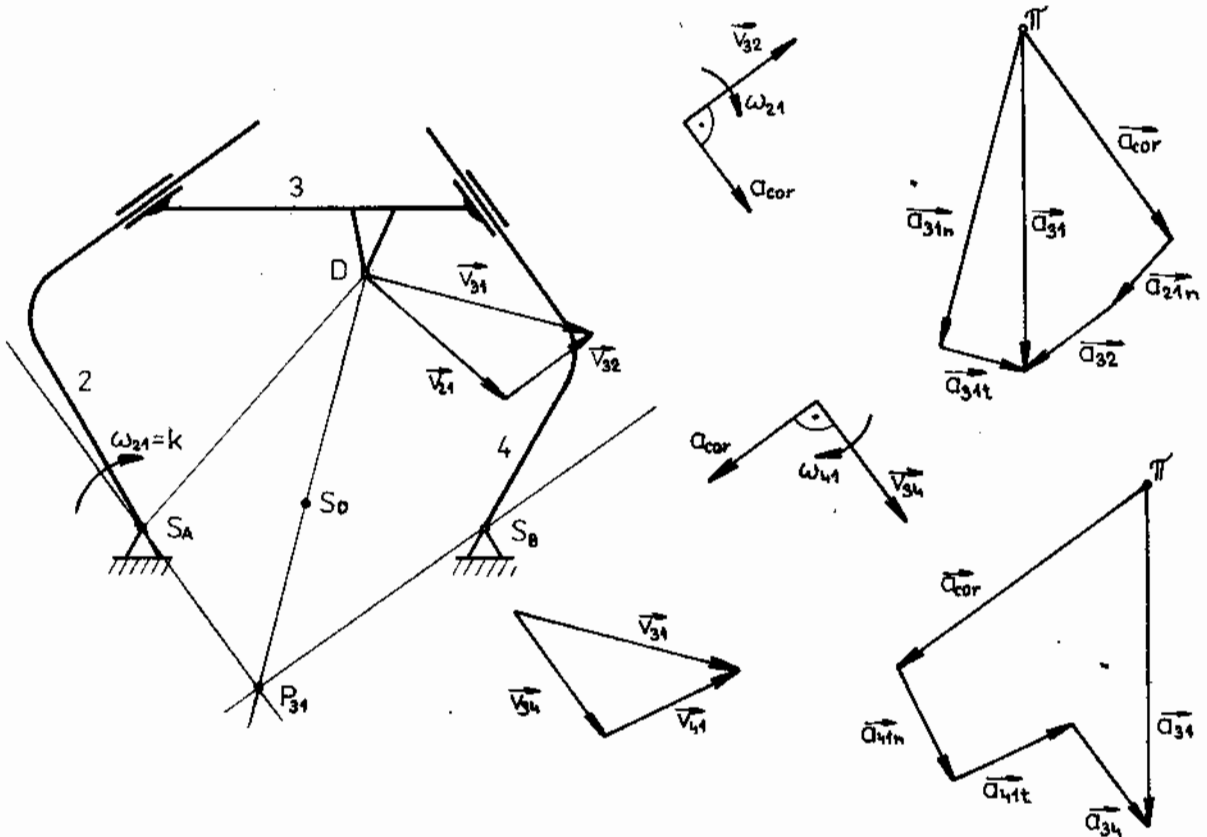
$$\underline{D} \quad \underline{\vec{v}_{31}} = \underline{\vec{v}_{32}} + \underline{\vec{v}_{21}}$$

Při myšleném pohybu 21 koná bod D rotační pohyb kolem bodu S_A , velikost rychlosti \vec{v}_{21} vypočteme ze vztahu

$$v_{21} = \omega_{21} \cdot \overline{S_A D}$$

nositelka je kolmá na spojnici

bodů $S_A D$. Při pohybu 32 vykonává bod D translační pohyb, známe nositelku. Při pohybu 31 vykonává obecný pohyb, t.zn., že pro určení nositelky rychlosti musíme znát pól P_{31} , rychlost je kolmá na normálu - spojnici bodů DP_{31} . Trojúhelník rychlostí je na obr. 32.1.



Obr. 32.1

Pro zrychlení bodu D platí rozklad

$$\begin{array}{c} \vec{a}_{31} \\ \swarrow \quad \searrow \\ n \quad t \end{array} = \vec{a}_{32} + \begin{array}{c} \vec{a}_{21} \\ \swarrow \quad \searrow \\ n \quad t=0 \end{array} + \vec{a}_{Cor}$$

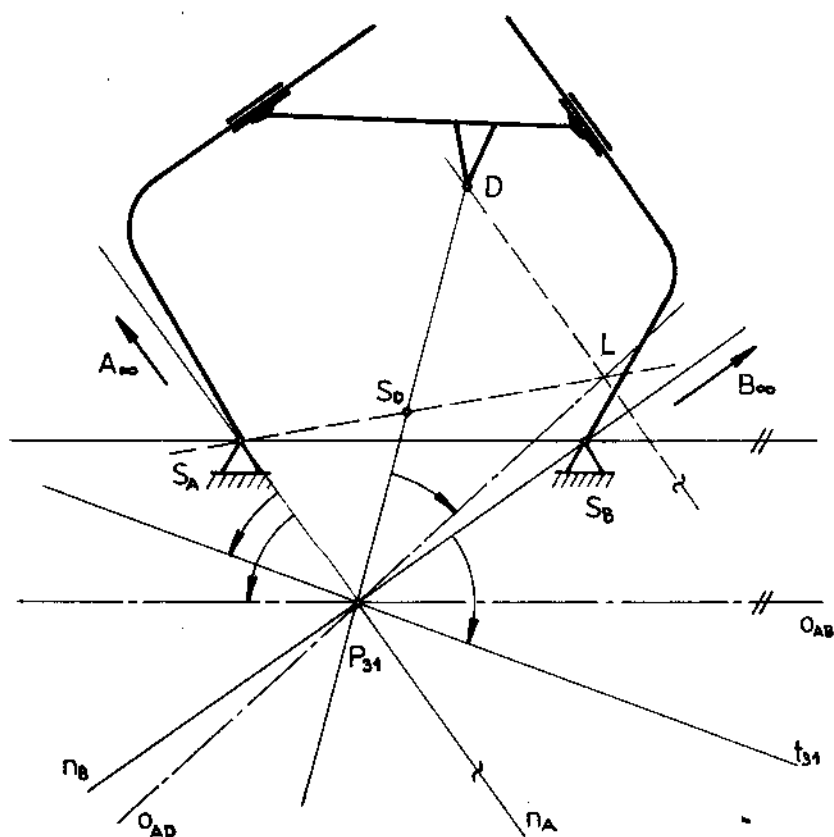
Velikost Coriolisova zrychlení vypočteme

$$a_{Cor} = 2 \omega_{21} \cdot v_{32}$$

směr a smysl určíme z obr. 32.1. Velikost zrychlení \vec{a}_{21n} vypočteme

$$a_{21n} = \frac{v_{21}^2}{S_{AD}}$$

nositelka zrychlení leží na spojnici bodů $S_A D$, zrychlení směřuje do bodu S_A . Nositelka zrychlení \vec{a}_{32} je ve směru pohybu. Pro výpočet zrychlení \vec{a}_{31n} musíme znát střed křivosti bodu D, který určíme Bobil'ierovou konstrukcí, obr. 32.2.



Obr. 32.2

Platí

$$a_{31n} = \frac{v_{31}^2}{DS_D}$$

nositelka zrychlení \vec{a}_{31n} leží na spojnici bodů DS_D , zrychlení směřuje do S_D .
Tečná složka zrychlení \vec{a}_{31t} je kolmá na normálovou. Obrazec zrychlení je na obr. 32.1.

V dosud použitém rozkladu není pohyb 41, takže výpočet ω_{41} , ε_{41} nelze provést, proto pro rychlost bodu D použijeme další rozklad

$$\boxed{D} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{34} + \vec{v}_{41}$$

Rychlost \vec{v}_{31} známe, pohyb 34 je translační, nositelka rychlosti \vec{v}_{34} je ve směru pohybu a pohyb 41 je rotační, nositelka rychlosti \vec{v}_{41} je kolmá na spojnici bodů $S_B D$.

Pro zrychlení platí

$$\vec{a}_{31} = \vec{a}_{34} + \underbrace{\vec{a}_{41}}_{\substack{n \\ \rightarrow}} + \underbrace{\vec{a}_{Cor}}_{\rightarrow}$$

Velikost zrychlení \vec{a}_{Cor} vypočteme

$$a_{Cor} = 2 \omega_{41} \cdot v_{34}$$

při čemž $\omega_{41} = \frac{v_{41}}{DS_B}$, směr a smysl určíme dle obr. 32.1. Velikost \vec{a}_{41n} vypočteme

$$a_{41n} = \frac{v_{41}^2}{S_B D}$$

tečná složka zrychlení \vec{a}_{41t} je kolmá na normálovou. Nositelka zrychlení \vec{a}_{34} je ve směru pohybu, zrychlení \vec{a}_{31} známe. Obrazec zrychlení je na obr. 32.1.

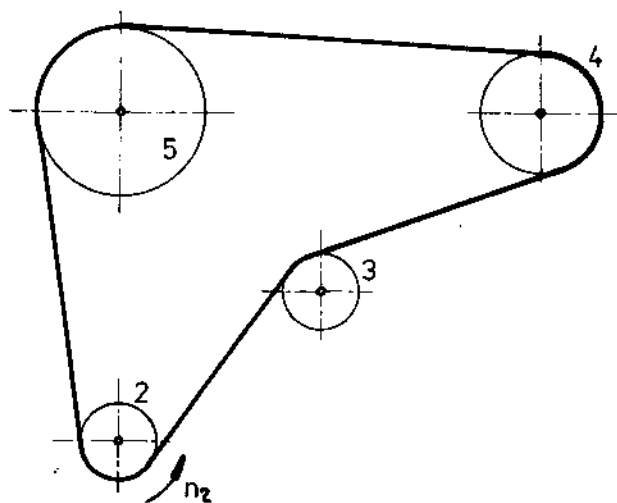
Úhlovou rychlost ω_{41} a úhlové zrychlení ε_{41} vypočteme ze vztahů

$$\omega_{41} = \frac{v_{41}}{S_B D} ; \quad \varepsilon_{41} = \frac{a_{41t}}{S_B D}$$

6.0. Soustavy s ozubenými koly - převody, planetové mechanismy, diferenciály

Příklad 33.

Na obr. 33 je znázorněn řetězový převod žacího stroje s hnacím kolem 2. Určete úhlové rychlosti a otáčky kol 4 a 5 jsou-li dány otáčky $n_{21} = 1000 \text{ min}^{-1}$ a poloměry roztečných kružnic ozubených kol: $r_2 = 0,12 \text{ m}$, $r_3 = 0,12 \text{ m}$, $r_4 = 0,2 \text{ m}$, $r_5 = 0,3 \text{ m}$.



Obr. 33

Řešení:

Nejdříve z otáček vypočteme úhlovou rychlost

$$\omega_{21} = \frac{\pi n_{21}}{30} = \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 104,7 \text{ s}^{-1}$$

Obvodová rychlost všech ozubených kol musí být stejná. Proto platí

$$v_{21} = v_{41}$$

$$r_2 \cdot \omega_{21} = r_4 \cdot \omega_{41}$$

$$v_{21} = v_{51}$$

$$r_2 \cdot \omega_{21} = r_5 \cdot \omega_{51}$$

odtud

$$\omega_{41} = \frac{r_2}{r_4} \cdot \omega_{21}; \quad \omega_{51} = \frac{r_2}{r_5} \cdot \omega_{21}$$

$$\omega_{41} = \frac{0,12}{0,2} \cdot 104,7 = 62,8 \text{ s}^{-1}; \quad \omega_{51} = \frac{0,12}{0,3} \cdot 104,7 = 41,9 \text{ s}^{-1}$$

$$n_{41} = \frac{\omega_{41} \cdot 30}{\pi} = 600 \text{ min}^{-1}; \quad n_{51} = \frac{\omega_{51} \cdot 30}{\pi} = 400 \text{ min}^{-1}$$

Pro napínací kolo 3 platí

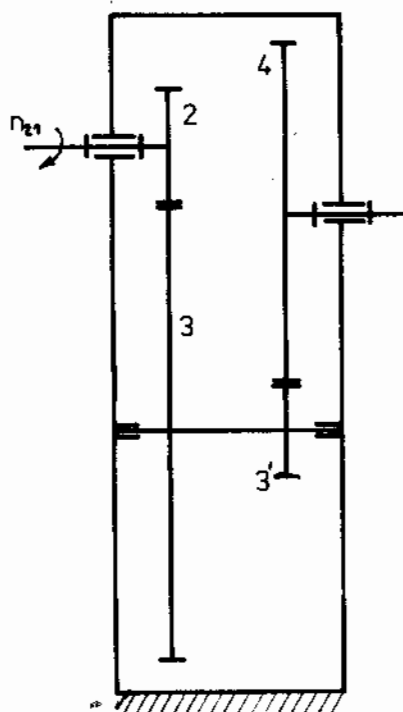
$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = - \frac{r_3}{r_2}; \quad \omega_{21} \cdot r_2 = - \omega_{31} \cdot r_3$$

$$\omega_{31} = - \frac{r_2}{r_3} \omega_{21} = \frac{0,12}{0,12} \cdot 104,7 = 104,7 \text{ s}^{-1}$$

$$n_{31} = 1000 \text{ min}^{-1}$$

Příklad 34.

Vypočtete převod p_{24} a úhlovou rychlost ω_{41} , reduktoru znázorněného na obr. 34, jsou-li dány počty zubů: $z_2 = 20$, $z_3 = 80$, $z_3' = 16$, $z_4 = 60$, a otáčky hnacího hřídele $n_{21} = 1200 \text{ min}^{-1}$.



Obr. 34

Řešení:

Úhlovou rychlost ω_{21} vypočteme ze vztahu

$$\omega_{21} = \frac{\pi n_{21}}{30} = \frac{\pi 1200}{30} = 125,66 \text{ s}^{-1}$$

U předlohových mechanismů platí pro převodový poměr

$$p_{23} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} ; \quad p_{34} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{31}}$$

a dále

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = - \frac{z_2}{z_3} ; \quad \frac{\omega_{41}}{\omega_{31}} = - \frac{z_3'}{z_4}$$

$$\begin{aligned} p_{24} &= p_{23} \cdot p_{34} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} \cdot \frac{\omega_{41}}{\omega_{31}} = \\ &= \left(- \frac{z_2}{z_3}\right) \left(- \frac{z_3'}{z_4}\right) = \frac{z_2 \cdot z_3'}{z_3 \cdot z_4} \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme převod

$$p_{24} = \frac{z_2 \cdot z_3'}{z_3 \cdot z_4} = \frac{20}{80} \cdot \frac{16}{60} = \frac{1}{15}$$

Pro úhlovou rychlost bude

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{z_2 \cdot z_3'}{z_3 \cdot z_4}$$

odtud

$$\omega_{41} = \omega_{21} \cdot \frac{z_2 \cdot z_3'}{z_3 \cdot z_4} = 125,66 \cdot \frac{20}{80} \cdot \frac{16}{60} = 8,38 \text{ s}^{-1}$$

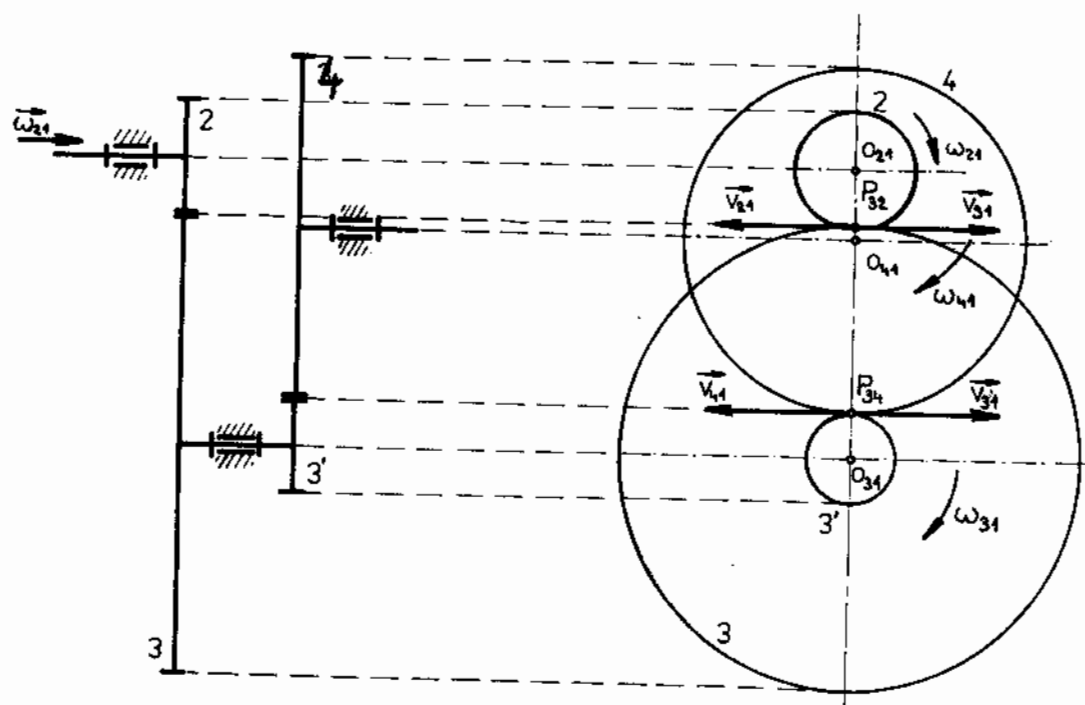
Řešení použitím podmínek valení:

Příklad pro kontrolu vyřešíme použitím podmínek valení (metoda podmínek valení). Tuto metodu můžeme použít prakticky vždy jedná-li se o mechanismus s ozubenými koly s konstantním převodem. Metoda je založena na principu současných pohybů a spočívá v tom, že bod jehož rychlost vyšetřujeme volíme v pólu výsledného, relativního nebo unášivého pohybu, neboť příslušná rychlost je zde nulová. Řešení

je možné provést graficky nebo početně. Grafickým řešením se nebudeme zabývat.

Při početním řešení do podmínek valení zavádíme úhlové rychlosti a poloměry. Přitom je výhodné předpokládat všechny pohyby (všechny úhlové rychlosti) v témže smyslu. Podmínek valení napíšeme tolik, kolik máme neznámých (počet rovnic musí být roven počtu neznámých).

Řešený reduktor schematicky překreslíme dle obr. 34.1, ozubená kola nakreslíme v bokorysu a označíme příslušné póly (okamžité středy otáčení).



Obr. 34.1

Platí rozklad

$$31 = 32 + 21$$

a pro rychlost

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$$

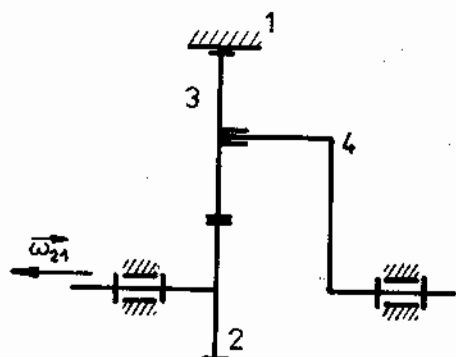
Řešení provedeme pro bod P_{32} (pól P_{32}) v němž $\vec{v}_{32} = 0$. Takže

$$\left. \vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} \right|_{P_{32}}$$

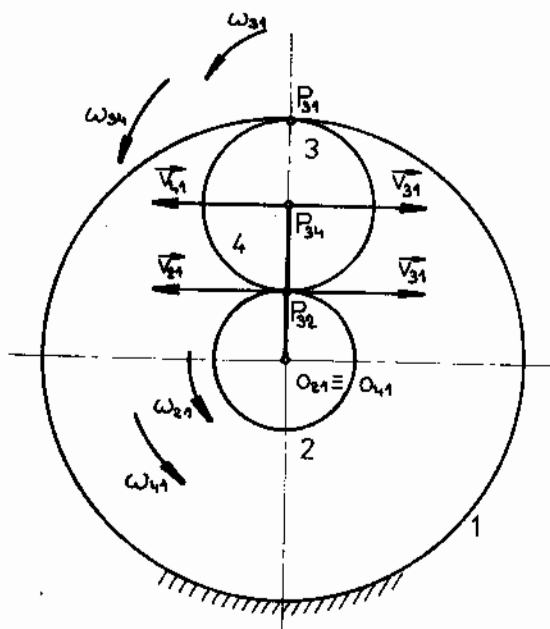
Protože pro obvodovou rychlost obecně platí (skalárně) $v = \omega \cdot r$, bude pro náš příklad

$$\omega_{31} \cdot r_3 = -\omega_{21} \cdot r_2 \quad (1)$$

(smysly úhlových rychlostí volíme ve smyslu otáčení hodinových ručiček).



Obr. 35



Obr. 35.1

$$31 = 32 + 21$$

Pro rychlosti platí

$$\vec{v}_{31} = \vec{v}_{32} + \vec{v}_{21}$$

Řešení provedeme pro bod P_{32} , ve kterém $\vec{v}_{32} = 0$ (rychlost v pólu je nulová), takže

$$\left. \vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} \right|_{P_{32}}$$

Rychlosti \vec{v}_{31} a \vec{v}_{21} vyjádříme skalárně z příslušných úhlových rychlostí a poloměrů, t.j. vzdáleností okamžitých středů otáčení O_{21} a P_{31} . Platí

$$\omega_{31} \cdot 2r_3 = -\omega_{21} \cdot r_2$$

Záporné znaménko na pravé straně rovnice je proto, že rychlosti \vec{v}_{31} , \vec{v}_{21} mají v bodě P_{32} opačný smysl. Úpravou

$$\omega_{31} = -\frac{r_2}{2r_3} \omega_{21}$$

Pohyb 31 můžeme též rozložit

$$31 = 34 + 41$$

Pro rychlosti v bodě P_{34} bude platit ($\vec{v}_{34} = 0$)

$$\boxed{P_{34}} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{41}$$

a dále dle obr. 35.1

$$\omega_{31} \cdot r_3 = - \omega_{41} \cdot (r_2 + r_3)$$

(rychlosti \vec{v}_{31} , \vec{v}_{41} mají v bodě P_{34} opět opačný smysl). Odtud

$$\omega_{41} = - \frac{r_3}{r_2 + r_3} \omega_{31}$$

Dosazením ω_{31} z předchozího rozkladu a úpravou obdržíme

$$\omega_{41} = - \frac{r_3}{r_2 + r_3} \left(- \frac{r_2}{2r_3} \omega_{21} \right) = \frac{r_2}{2(r_2 + r_3)} \omega_{21}$$

Dále platí

$$2r_3 + r_2 = r_1$$

po dosazení bude

$$\omega_{41} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \omega_{21}$$

Za předpokladu, že moduly všech ozubených kol jsou stejné, můžeme poloměry r_1 , r_2 nahradit počty zubů z_1 , z_2

$$\omega_{41} = \frac{z_2}{z_1 + z_2}$$

Po dosazení zadaných hodnot obdržíme

$$= \frac{24}{84 + 24} \cdot 62,8 = 13,96 \text{ s}^{-1}$$

Řešení metodou zastavení unašeče:

Pro kontrolu provedeme řešení metodou zastavení unašeče. Princip této metody je vysvětlován tak, že planetový mechanismus (diferenciál) sledujeme z unašeče nikoliv z rámu, takže planetový mechanismus se nám potom jeví jako předloha. Platí

$$\frac{\omega_{21} - \omega_{41}}{-\omega_{41}} = - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_3 \cdot z_2}$$

Kolo 3 (satelit) je vloženo a tedy nezáleží na počtu zubů. Znaménko na pravé straně určíme podle počtu záběrů. Je-li počet záběrů sudý je znaménko plus, je-li lichý je mínus, záběr s vnitřním ozubením do tohoto počtu nezahrnujeme, neboť nemění smysl otáčení. Toto pravidlo však platí pouze pro soustavy s jedním stupněm volnosti a s čelními ozubenými koly.

V našem příkladu počítáme jen jeden záběr, neboť mezi koly 1 a 3 je vnitřní

ozubení, proto je na pravé straně rovnice znaménko minus. Úhlovou rychlost ω_{41} vy-
počteme

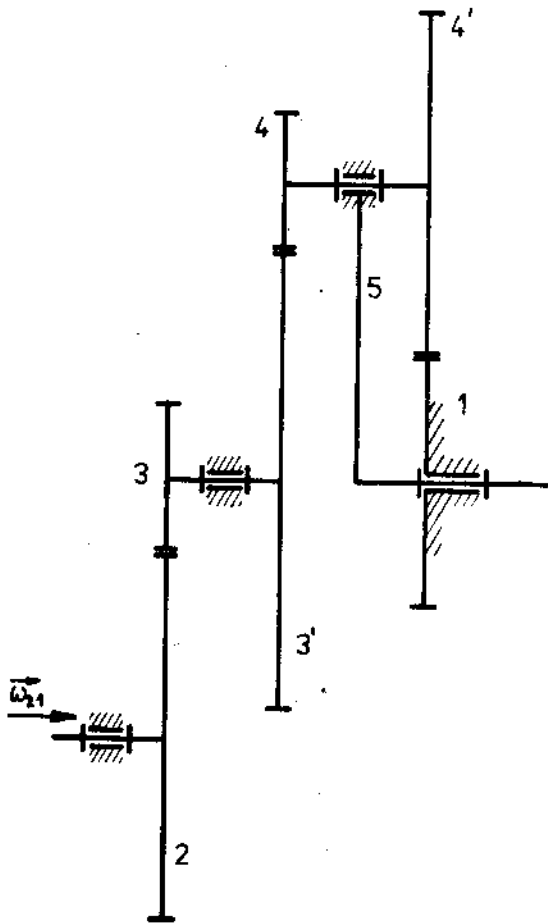
$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \frac{z_1}{z_2} + 1$$

$$\omega_{41} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} \omega_{21}$$

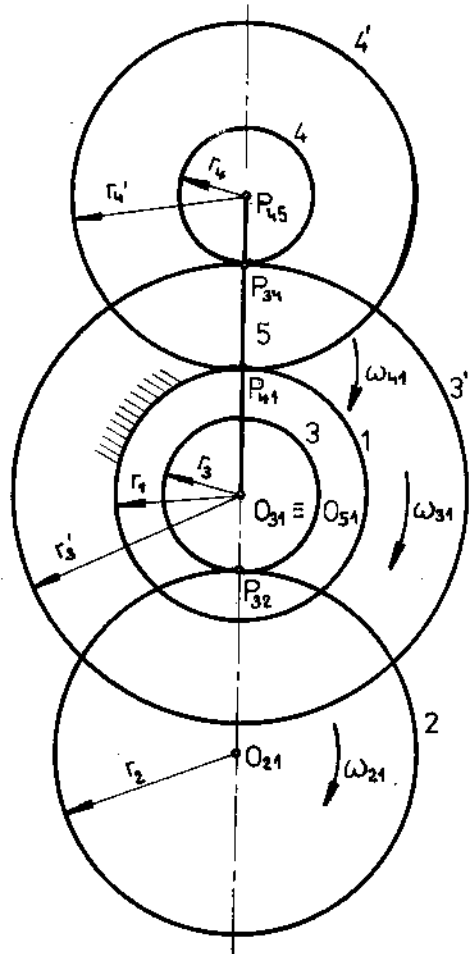
Výsledek je stejný jako při použití metody výminek valení.

Příklad 36.

Určete úhlovou rychlost ω_5 unašeče 5 planetového převodu s dvojitým sate-
litem, schematicky znázorněného na obr. 36. Hnací kolo 2 má otáčky $n_{21} = 450 \text{ min}^{-1}$.
Počty zubů jsou: $z_1 = 44$, $z_2 = 64$, $z_3 = 26$, $z_3' = 80$, $z_4 = 24$, $z_4' = 60$.



Obr. 36



Obr. 36.1

Řešení:

provedeme nejdříve metodou podmínek valení. Všechny úhlové rychlosti budeme uvažovat ve stejném smyslu, obr. 36.1.

Platí rozklad

$$31 = 32 + 21$$

pro pól P_{32} platí

$$\begin{aligned} \boxed{P_{32}} \quad \vec{v}_{31} &= \vec{v}_{21} \\ \omega_{31} \cdot r_3 &= -\omega_{21} \cdot r_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Další rozklady budou

$$\begin{aligned} 31 &= 34 + 41 \\ \boxed{P_{34}} \quad \vec{v}_{31} &= \vec{v}_{41} \\ \omega_{31} \cdot r_{3'} &= \omega_{41} (r_{4'} - r_4) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 41 &= 45 + 51 \\ \boxed{P_{45}} \quad \vec{v}_{41} &= \vec{v}_{51} \\ \omega_{41} \cdot r_{4'} &= \omega_{51} (r_{3'} + r_4) \end{aligned} \quad (3)$$

Obdrželi jsme tři rovnice (1), (2), (3) o třech neznámých ω_{31} , ω_{41} , ω_{51} . Řešení bude

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= -\frac{r_2}{r_3} \omega_{21} ; \quad \omega_{41} = \frac{r_{3'}}{r_{4'} - r_4} \omega_{31} \\ \omega_{51} &= \frac{r_{4'}}{r_{3'} + r_4} \omega_{41} = \frac{r_{3'} \cdot r_{4'}}{(r_{4'} - r_4)(r_{3'} + r_4)} \omega_{31} \end{aligned}$$

Za předpokladu, že všechna ozubená kola mají stejný modul, můžeme místo poloměrů psát počty zubů, přitom musí platit

$$r_{3'} + r_4 = r_{4'} + r_1 \quad \text{nebo} \quad z_{3'} + z_4 = z_{4'} + z_1$$

Po dosazení obdržíme

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= -\frac{z_2}{z_3} \omega_{21} ; \quad \omega_{21} = \frac{\pi n_{21}}{30} \\ \omega_{51} &= \frac{z_{3'} \cdot z_{4'}}{(z_{4'} - z_4)(z_{3'} + z_4)} \end{aligned}$$

po dosazení číselných hodnot

$$\omega_{31} = - \frac{64}{26} \cdot \frac{\pi \cdot 450}{30} = 115,99 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{51} = \frac{80 \cdot 60}{(60 - 24)(80 + 24)} \cdot 115,99 = 148,7 \text{ s}^{-1}$$

Řešení pro kontrolu provedeme ještě metodou zastavení unašeče. Tato metoda je vhodná pro jednoduchý planetový mechanismus nebo diferenciál. V případě, že planetový mechanismus nebo diferenciál je spojen s dalším přidavným zařízením (další převod ozubených kol, převodovkou, jiným planetovým mechanismem, diferenciálem a pod.), je nutné řešení rozdělit na části.

V našem případě příklad rozdělíme na dvě části t.j. řešíme samostatně převod mezi koly 2 a 3 a dále metodou zastavení unašeče vyřešíme planetový převod. Pro převod mezi koly 2 a 3 platí

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = - \frac{z_2}{z_3}$$

$$\omega_{31} = - \frac{z_2}{z_3} \omega_{21} \quad ; \quad \omega_{21} = \frac{\pi n_{21}}{30}$$

Pro metodu zastavení unašeče platí

$$\frac{\omega_{31} - \omega_{51}}{-\omega_{51}} = \frac{z_1}{z_{4'}} \cdot \frac{z_4}{z_{3'}}$$

úpravou poslední rovnice obdržíme

$$\omega_{31} - \omega_{51} = - \frac{z_1}{z_{4'}} \cdot \frac{z_4}{z_{3'}}$$

$$\omega_{31} = \omega_{51} \left(1 - \frac{z_1 z_4}{z_{4'} z_{3'}} \right)$$

$$\omega_{51} = \frac{z_{4'} z_{3'}}{z_{4'} z_{3'} - z_1 z_4} \omega_{31}$$

Po dosazení zadanych hodnot dojdeme ke stejnému výsledku

$$\omega_{51} = \frac{60 \cdot 80}{60 \cdot 80 - 44 \cdot 24} \cdot 115,99 = 148,7 \text{ s}^{-1}$$

Poznámka:

V případě, že chceme výsledky porovnat v obecném tvaru t.j. rovnici

$$\omega_{51} = \frac{z_3' z_4'}{z_3' z_4' - z_1 z_4} \omega_{31}$$

s rovnici

$$\omega_{51} = \frac{z_3' z_4'}{(z_4' - z_4)(z_3' + z_4)} \omega_{31} = \frac{z_3' z_4'}{z_3' z_4' + z_4 z_4' - z_3' z_4 - z_4^2} \omega_{31}$$

dosadíme do první rovnice vztah

$$z_3' + z_4 = z_4' + z_1 \quad ; \quad \text{odtud} \quad z_1 = z_3' + z_4 - z_4'$$

takže obdržíme

$$\omega_{51} = \frac{z_3' z_4'}{z_3' z_4' - (z_3' + z_4 - z_4') z_4} \omega_{31} = \frac{z_3' z_4'}{z_3' z_4' + z_4 z_4' - z_3' z_4 - z_4^2} \omega_{31}$$

Příklad 37.

Určete úhlovou rychlost ω_{41} , unašeče diferenciálu s čelními ozubenými koly. Je dáno: $\omega_{21} = 157 \text{ s}^{-1}$; $\omega_{51} = 15,7 \text{ s}^{-1}$; $z_2 = 40$; $z_5 = 80$; $z_3 = 20$. Diferenciál je schematicky znázorněn na obr. 37.

Řešení:

Pro jednoznačné určení pohybu soustavy se dvěma stupni volnosti (diferenciálu) musíme znát pohyby dvou těles. Proto jsou zadány úhlové rychlosti ω_{21} , ω_{51} . K řešení použijeme metodu podmínek valení pro body, které leží v pólech relativních pohybů příslušných rozkladů.

Nejdříve si nakreslíme obrázek v bokorysu, obr. 37.1 s příslušnými okamžitými středy otáčení - póly. Všechny úhlové rychlosti budeme uvažovat v jednom smyslu (ve smyslu otáčení hodinových ručiček). Předpokládáme, že všechna ozubená kola mají stejný modul, takže místo počtu zubů můžeme psát poloměry.

K řešení použijeme rozklad

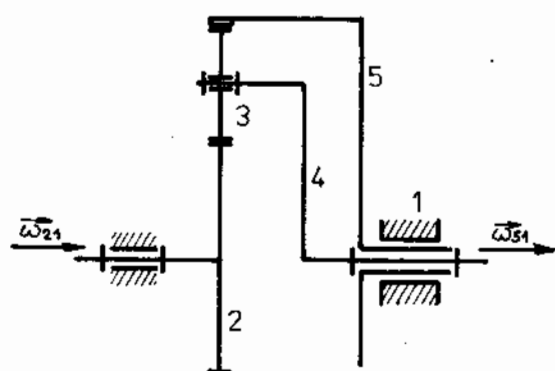
$$31 = 32 + 21$$

Pro pól P_{32} platí, že rychlosti

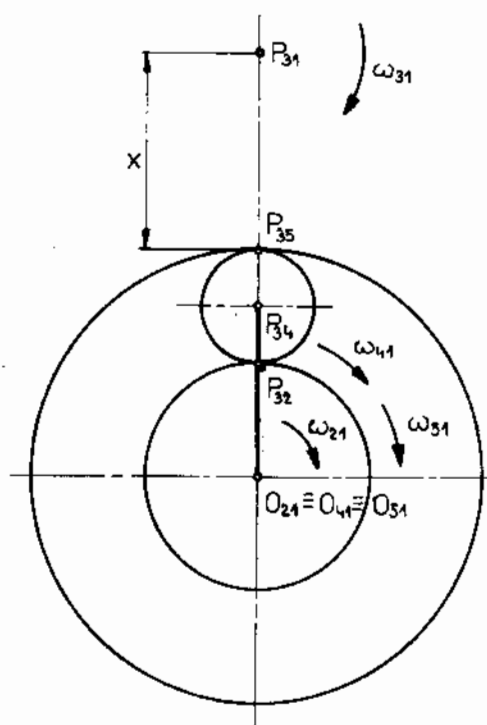
$$\left. P_{32} \right| \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{21}$$

rychlost \vec{v}_{32} je v pólu P_{32} nulová. Okamžitý střed otáčení O_{21} známe, pól P_{32} rovněž známe, ale polohu pólu P_{31} neznáme, víme pouze (na základě uvedeného rozkladu), že leží na přímce procházející body O_{21} , P_{32} . Proto si pól P_{31} zvolíme ve vzdálenosti x od pólu P_{35} , obr. 37.1.

Pro skalární vyjádření obvodových rychlostí pro pól P_{32} platí



Obr. 37



Obr. 37.1

$$\omega_{31} (x + 2r_3) = -\omega_{21} r_2 \quad (1)$$

Dále použijeme rozklad

$$31 = 34 + 41$$

Pro rychlost v pólu P_{34} platí

$$\begin{aligned} \underline{P_{34}} \quad \vec{v}_{31} &= \vec{v}_{41} \\ \omega_{31} (x + r_3) &= -\omega_{41} (r_2 + r_3) \end{aligned} \quad (2)$$

Další rozklad bude

$$31 = 35 + 51$$

pro rychlost v pólu P_{35} platí

$$\begin{aligned} \underline{P_{35}} \quad \vec{v}_{31} &= \vec{v}_{51} \\ \omega_{31} \cdot x &= -\omega_{51} \cdot r_5 \end{aligned} \quad (3)$$

Obdrželi jsme tři rovnice (1), (2), (3) o třech neznámých ω_{31} , ω_{41} , x . Řešením těchto rovnic dostaneme

$$\omega_{31} = \frac{\omega_{51} r_5 - \omega_{21} r_2}{2r_3} ; \quad x = -\frac{\omega_{51} r_5 + 2r_3}{\omega_{51} r_5 - \omega_{21} r_2} ; \quad \omega_{41} = \frac{\omega_{51} r_5 + \omega_{21} r_2}{2(r_2 + r_3)}$$

Poněvadž platí

$$2(r_2 + r_3) = 2r_2 + 2r_3 = r_2 + r_5$$

bude

$$\omega_{41} = \frac{\omega_{21} r_2 + \omega_{51} r_5}{r_2 + r_5}$$

U všech ozubených kol uvažujeme stejný modul, proto místo poloměrů můžeme dosadit počty zubů

$$\omega_{31} = \frac{15,7.80 - 157.40}{2.20} = -125,6 \text{ s}^{-1}$$

$$x = - \frac{15,7.80.2.20}{15,7.80 - 157.40} = 10 \text{ mm} \quad (\text{za předpokladu, že poloměry byly dosazeny v mm})$$

$$\omega_{41} = \frac{15,7.80 + 157.40}{40 + 80} = 62,8 \text{ s}^{-1}$$

Kontrolu řešení provedeme metodou zastavení unašeče. Platí

$$\frac{\omega_{21} - \omega_{41}}{\omega_{51} - \omega_{41}} = - \frac{z_5}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_2}$$

Řešením obdržíme

$$(\omega_{21} - \omega_{41}) z_2 = -(\omega_{51} - \omega_{41}) z_5$$

$$\omega_{41} (z_5 + z_2) = \omega_{21} z_2 + \omega_{51} z_5$$

$$\omega_{41} = \frac{\omega_{21} z_2 + \omega_{51} z_5}{z_2 + z_5}$$

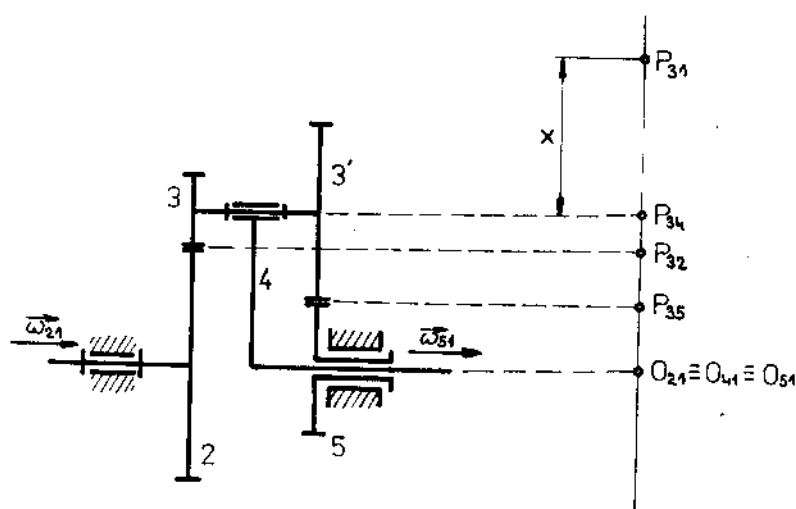
Příklad 38.

Určete úhlovou rychlost ω_{41} unašeče 4 diferenciálu s čelními ozubenými koly a dvojitým satelitem, schematicky znázorněného na obr. 38. Je dáno: $\omega_{21} = 62,8 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{51} = 47,1 \text{ s}^{-1}$, $z_2 = 80$, $z_3 = 24$, $z_3' = 60$, $z_5 = 44$.

Řešení:

provedeme nejdříve použitím podmínek valení pro body ležící v pólech relativních pohybů příslušných rozkladů. Pól P_{31} neznáme, proto jej volíme ve vzdálenosti x od pólu P_{34} . Smysly úhlových rychlostí volíme všechny stejné. Platí rozklady

$$\begin{aligned} 31 &= 32 + 21 \\ \vec{v}_{31} &= \vec{v}_{21} \\ \omega_{31}(x + r_3) &= -\omega_{21}r_2 \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 38

$$31 = 34 + 41$$

$$P_{34} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{41}$$

$$\omega_{31} x = -\omega_{41} (r_2 + r_3) \quad (2)$$

$$31 = 35 + 51$$

$$P_{35} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{51}$$

$$\omega_{31} (x + r_3) = -\omega_{51} r_5 \quad (3)$$

Získali jsme tři rovnice (1), (2), (3) o třech neznámých ω_{31} , ω_{41} , x . Řešením rovnic (1), (3) obdržíme

$$\omega_{31} x + \omega_{31} r_3 = -\omega_{21} r_2$$

$$\omega_{31} x = -\omega_{21} r_2 - \omega_{31} r_3$$

$$-\omega_{21} r_2 - \omega_{31} r_3 + \omega_{31} r_3' = -\omega_{31} r_5$$

$$\omega_{31} = \frac{\omega_{21} r_2 - \omega_{51} r_5}{r_3' - r_3}$$

Protože při řešení v obecném tvaru obdržíme složité výrazy, provedeme hned číselné dosazení. Moduly všech ozubených kol uvažujeme stejné, proto místo poloměrů můžeme dosadit počty zubů

$$\omega_{31} = \frac{62,8.80 - 47,1.44}{60 - 24} = 81,99 \text{ s}^{-1}$$

Z rovnice (1) bude

$$x = \frac{-\omega_{21} r_2 - \omega_{31} r_3}{\omega_{31}} = \frac{62,8.80 - 81,99.24}{81,99} = -85,25 \text{ mm}$$

(uvažujeme-li poloměry v mm je též x v mm).

Z rovnice (2)

$$\omega_{41} = -\frac{\omega_{31} x}{r_2 + r_3} = -\frac{-85,25.81,99}{80 + 24} = 67,2 \text{ s}^{-1}$$

Kontrolu řešení provedeme metodou zastavení unašeče. Platí

$$\frac{\omega_{21} - \omega_{41}}{\omega_{51} - \omega_{41}} = \frac{z_5}{z_3'} \cdot \frac{z_3}{z_2}$$

Tento výraz upravíme, takže bude

$$(\omega_{21} - \omega_{41})z_3'z_2 = (\omega_{31} - \omega_{41})z_5z_3$$

$$\omega_{41}(z_5z_3 - z_3'z_2) = \omega_{31}z_5z_3 - \omega_{21}z_3'z_2$$

odtud

$$\omega_{41} = \frac{\omega_{31}z_3z_5 - \omega_{21}z_2z_3'}{z_3z_5 - z_2z_3'}$$

a po dosazení

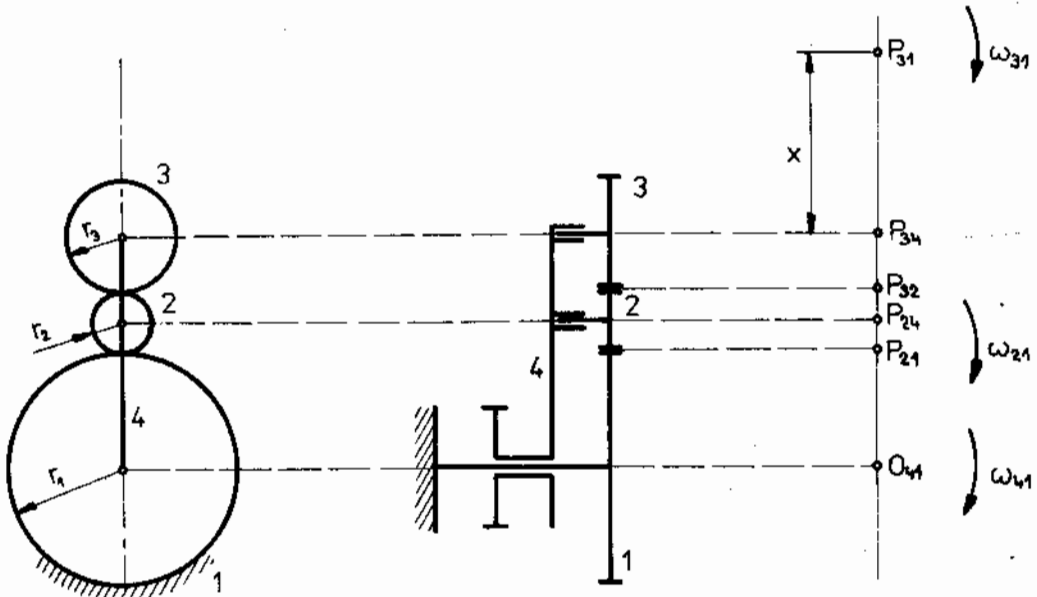
$$\omega_{41} = \frac{47,1 \cdot 24,44 - 62,8 \cdot 80,60}{24,44 - 80,60} = 67,2 \text{ s}^{-1}$$

Příklad 39.

Unašeč 4 planetového mechanismu na obr. 39 je poháněn ozubeným soukolím stálou úhlovou rychlostí ω_{41} . Vypočítejte úhlové rychlosti planetových kol 2 a 3 uložených otočně na unašeči. Poloměry kol jsou: $r_1 = 0,2 \text{ m}$; $r_2 = 0,05 \text{ m}$; $r_3 = 0,1 \text{ m}$; úhlová rychlost $\omega_{41} = 6,5 \text{ s}^{-1}$.

Řešení:

provedeme nejprve z podmínek valení. Všechny úhlové rychlosti uvažujeme v témže smyslu, jak je vyznačeno na obr. 39. Podmínky valení budeme psát pro póly



Obr. 39

relativního pohybu v nichž je rychlost nulová. Použijeme rozklad

$$41 = 42 + 21$$

$$\begin{array}{l} \underline{P_{42}} \quad \vec{v}_{41} = \vec{v}_{21} \\ \omega_{41} (r_1 + r_2) = \omega_{21} r_2 \end{array} \quad (1)$$

Další rozklad bude

$$\begin{array}{l} 31 = 32 + 21 \\ \underline{P_{32}} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{21} \end{array}$$

Polohu pólu P_{31} neznáme, víme pouze, že leží na přímce procházející póly P_{32} , P_{21} . Proto jej volíme ve vzdálenosti x od pólu P_{34} . Obvodové rychlosti jsou

$$\omega_{31} (x + r_3) = - \omega_{21} 2r_2 \quad (2)$$

Dále

$$\begin{array}{l} 31 = 34 + 41 \\ \underline{P_{34}} \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_{41} \\ \omega_{31} x = - \omega_{41} (r_3 + 2r_2 + r_1) \end{array} \quad (3)$$

Obdrželi jsme tři rovnice (1), (2), (3) o třech neznámých ω_{41} , ω_{31} , x . Jejich řešením dostaneme

$$\omega_{21} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \omega_{41}$$

Rovnici (3) dosadíme do (2)

$$\begin{aligned} \omega_{31} x + \omega_{31} r_3 &= - \omega_{21} 2r_2 \\ - \omega_{41} (r_3 + 2r_2 + r_1) + \omega_{31} r_3 &= - \frac{2r_2(r_1 + r_2)}{r_2} \omega_{41} \end{aligned}$$

Úpravou obdržíme

$$\omega_{31} = \frac{r_3 - r_1}{r_3} \omega_{41}$$

Po dosazení zadaných hodnot

$$\omega_{21} = \frac{0,2 + 0,05}{0,05} \cdot 6,5 = 32,5 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{31} = \frac{0,1 - 0,2}{0,1} \cdot 6,5 = - 6,5 \text{ s}^{-1}$$

Kontrolu provedeme metodou zastavení unašeče, toto řešení je jednodušší. Při zastavení unašeče 4 a uvolnění kola 1 představuje mechanismus předlohu, pro kterou můžeme psát (uvažujeme moduly všech kol stejné)

$$\frac{\omega_{31} - \omega_{41}}{- \omega_{41}} = \frac{z_1}{z_3}$$

Po úpravě

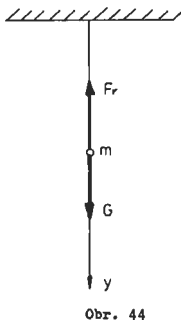
$$\omega_{31} = \frac{z_3 - z_1}{z_3} \omega_{41}$$

Poznámka:

Jestliže $r_1 = r_3$, pak $\omega_{31} = 0$ a satelit 3 koná posuvný kruhový pohyb. Takového planetového převodu se používá např. u vyoravače brambor u něhož je na tělese 3 připevněn nosič vidlic.

7.0. Dynamika hmotného bodu7.1. Pohyb po přímcePříklad 44.

Stanovte rovnici dráhy hmotného bodu, který je spuštěn s nulovou počáteční rychlostí svisle dolů. Hmotný bod se pohybuje v prostředí, které klade odpor přímo úměrný rychlosti $F_r = b \cdot v$, kde b je součinitel lineárního odporu, obr. 44.

Řešení:

Hmotný bod se pohybuje po přímce v odporujícím prostředí. Bod uvolníme, obr. 44 a napíšeme pohybovou rovnici

$$m \cdot a = G - F_r$$

kde $F_r = b \cdot v$, takže

$$m \cdot a = G - b \cdot v \qquad G = mg$$

úpravou

$$a = g - \frac{b}{m} v$$

Dosažením

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v$$

a separaci proměnných

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} = \int_{t_0}^t dt$$

Po integraci

$$-\frac{m}{b} \ln \left[g - \frac{b}{m} v \right] \Big|_{v_0}^v = \left[t \right]_{t_0}^t$$

pro počáteční podmínky $v_0 = 0$, $t_0 = 0$, bude

$$-\frac{m}{b} \left[\ln \left(g - \frac{b}{m} v \right) - \ln g \right] = t$$

úpravou obdržíme rychlost v závislosti na čase

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

Po dosazení $v = \frac{ds}{dt}$ bude

$$\frac{ds}{dt} = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

po separaci proměnných

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t \left(\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b} e^{-\frac{b}{m} t} \right) dt$$

Po integraci, úpravě a dosazení počátečních podmínek $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, obdržíme rovnici dráhy v závislosti na čase

$$s = \frac{mg}{b} \cdot t + \frac{m^2 g}{b^2} \left(e^{-\frac{b}{m} t} - 1 \right)$$

Příklad 45.

Vyšetřete pohyb hmotného bodu vrženého vzhůru počáteční rychlostí v_0 . Uvažujte odpor prostředí, který je závislý na druhé mocnině rychlosti $F_r = c \cdot v^2$, kde c je součinitel kvadratického odporu, obr. 45.

Řešení:

Hmotný bod uvolníme a ve směru osy y napíšeme pohybovou rovnici

$$m \cdot a = -G - F_r$$

kde $F_r = c \cdot v^2$, takže

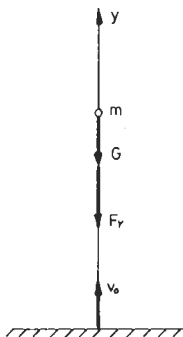
$$m \cdot a = -G - c \cdot v^2$$

dosazením $G = mg$ a úpravou obdržíme rovnici, kde zrychlení je závislé na rychlosti

$$a = -g - \frac{c}{m} v^2$$

Dosazením $a = \frac{dv}{dt}$ a separací proměnných bude

$$- \frac{dv}{g + \frac{c}{m} v^2} = dt$$



Obr. 45

Řešení provedeme neurčitým integrálem

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{1 + \left(\sqrt{\frac{c}{mg}} v\right)^2} = - dt$$

po integraci

$$\frac{1}{g} \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v = -t + C_1$$

Integrační konstantu C_1 určíme z počátečních podmínek. Pro $t = 0$, $v = v_0$ bude

$$\frac{1}{g} \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v_0 = C_1$$

dosazením integrační konstanty a úpravou obdržíme

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v_0 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v = \sqrt{\frac{cg}{m}} t$$

Použijeme-li vzorce

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$$

můžeme poslední rovnici přepsat

$$\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v_0 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{mg}} v}{1 + \frac{v \cdot v_0}{\frac{mg}{c}}} = \sqrt{\frac{cg}{m}} t$$

a dále

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{c}} v_0 - \sqrt{\frac{mg}{c}} v}{\frac{mg}{c} + v_0 v} = \operatorname{tg} \sqrt{\frac{cg}{m}} t$$

Vyjádříme rychlost

$$v = \frac{\sqrt{\frac{mg}{c}} (v_0 - \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{cg}{m}} t)}{v_0 \operatorname{tg} \sqrt{\frac{cg}{m}} t + \sqrt{\frac{mg}{c}}}$$

dále dosadíme

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{cg}{m}} t = \frac{\sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t}{\cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t}$$

a po úpravě bude

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \cdot \frac{v_0 \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t - \sqrt{\frac{mg}{c}} \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t}{v_0 \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t + \sqrt{\frac{mg}{c}} \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t}$$

Dosazením $v = \frac{ds}{dt}$ obdržíme

$$\int ds = \sqrt{\frac{mg}{c}} \int \frac{v_0 \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t - \sqrt{\frac{mg}{c}} \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t}{v_0 \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t + \sqrt{\frac{mg}{c}} \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t}$$

po integraci

$$s = \frac{m^2}{c^2} \ln (v_0 \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t + \sqrt{\frac{mg}{c}} \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t) + C_2$$

Z počátečních podmínek určíme integrační konstantu C_2 . Pro $t = 0$ je $s = 0$, tedy

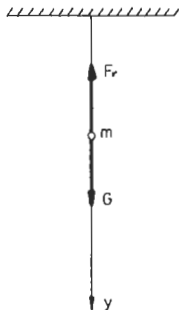
$$C_2 = -\frac{m^2}{2} \ln \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

Po dosazení a úpravě obdržíme dráhu v závislosti na čase

$$s = \frac{m^2}{c^2} \ln (v_0 \sqrt{\frac{c}{mg}} \sin \sqrt{\frac{cg}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{cg}{m}} t)$$

Příklad 46.

Určete jakou rychlost bude mít těleso, pohybující se volným pádem, ve vzdálenosti $s = 1000$ m od počátku pohybu. Dále určete maximální dosažitelnou rychlost (kritickou) a vzdálenost s_1 , ve které ji dosáhne. Je dána hmotnost tělesa $m = 100$ kg, odpor prostředí je úměrný čtverci rychlosti $P_r = c \cdot v^2$, kde $c = 0,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, počáteční rychlost $v_0 = 0$. Těleso uvažujte jako hmotný bod.



Řešení:

Hmotný bod uvolníme, obr. 46 a napíšeme pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} m \cdot a &= G - P_r \\ m \cdot a &= G - c \cdot v^2 \end{aligned}$$

Protože sledujeme závislost rychlosti na dráze, je vhodné použít vztah

$$a = \frac{d(v^2)}{2ds} = \frac{v dv}{ds}$$

$$\frac{v dv}{ds} = \frac{G - c \cdot v^2}{m}$$

Úpravou obdržíme

$$\int_0^v \frac{v dv}{G - c v^2} = \frac{1}{m} \int_0^s ds$$

po integraci

$$-\frac{1}{2c} \left[\ln(G - c v^2) - \ln G \right] = \frac{1}{m} s$$

dále

$$\ln \frac{G}{G - c v^2} = \frac{2c}{m} s \quad (1)$$

další úpravou a dosazením zadaných hodnot bude rychlost ve vzdálenosti s

$$v = \sqrt{\frac{G}{c} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2c}{m} s}} \right)} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9,81}{0,35} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2 \cdot 0,35}{100} 1000}} \right)} = 52,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Maximální (kritickou) rychlost dosáhne těleso v okamžiku, kdy odpor prostředí bude roven tíhové síle

$$c v_{\max}^2 = G$$

odtud

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{G}{c}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9,81}{0,35}} = 52,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vzdálenost s_1 ve které těleso dosáhne kritickou rychlost vypočteme ze vztahu (1), kde za rychlost v dosadíme v_{\max} a za s dráhu s_1

$$s_1 = \frac{m}{2c} \ln \frac{G}{G - c v_{\max}^2} \quad (2)$$

$$s_1 = \frac{100}{2 \cdot 0,35} \ln \frac{100 \cdot 9,81}{100 \cdot 9,81 - 0,35 \cdot 52,94^2} = 702,2 \text{ m}$$

Poznámka:

V rovnici (2) je hodnota jmenovatele $G - c v_{\max}^2$ rovna nule, tedy přirozený logaritmus $\ln \frac{G}{G - c v_{\max}^2}$ je nekonečně velký. To znamená, že maximální rychlost tělesa teoreticky dosáhne v nekonečné vzdálenosti od počátku. Tímto můžeme též zdůvodnit nepatrný rozdíl rychlostí $v = 52,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_{\max} = 52,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Příklad 47.

Těleso tíže $G = 5000 \text{ N}$ zavěšené na laně se začne pohybovat konstantním zrychlením $a = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$. Určete sílu v laně, po dobu zrychleného pohybu, pro pohyb tělesa nahoru a dolů. Hmotnost lana, háku a odpor prostředí neuvažujte a předpokládejte, že lano je dokonale tuhé.

Řešení:

Koná-li těleso pohyb nahoru provedeme uvolnění dle obr. 47, pohybová rovnice bude



Obr. 47



Obr. 47.1

$$m \cdot a = S - G$$

odtud

$$S = m \cdot a + G$$

Z této rovnice plyne, že síla v laně je závislá na zrychlení. Pro případ, že $a = 0$ je těleso v klidu nebo rovnoměrném pohybu a síla v laně je $S = G$, což je statický případ.

Z poslední rovnice obdržíme

$$S = \frac{G}{g} a + G = \frac{5000}{9,81} 0,5 + 5000 = 5254,8 \text{ N}$$

Pro pohyb dolů je vhodné osu y zvolit s opačným znaménkem, obr. 47.1. Platí

$$m \cdot a = G - S$$

Odtud

$$S = G - m \cdot a = 5000 - \frac{5000}{9,81} 0,5 = 4745,2 \text{ N}$$

Příklad 48.

Těleso, které se pohybovalo po vodorovné podložce, vykonalo za čas $t_1 = 3 \text{ s}$ délku dráhy $s_1 = 8 \text{ m}$ a zastavilo se. Vypočítejte koeficient smykového tření z předpokladu, že na těleso působila pouze třecí síla.

Řešení:

Těleso uvolníme, obr 48 a napíšeme pohybovou rovnici

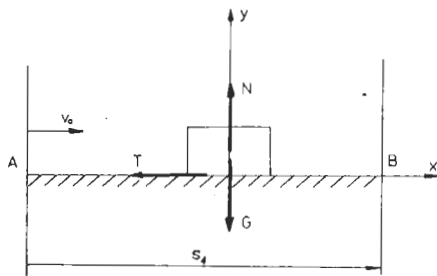
$$m \cdot a = - T$$

kde $T = N \cdot f$, N je reakce ve směru normály. Ve směru osy y není pohyb, takže síly N a G jsou v rovnováze. Platí

$$N = G$$

$$G = mg$$

Po dosazení a úpravě



Obr. 48

$$a = -gf$$

Dále dosadíme

$$\frac{dv}{dt} = -gf$$

po separaci proměnných

$$\int dv = -gf \int dt$$

obdržíme

$$v = -gft + C_1 \quad (1)$$

Dále dosadíme

$$\frac{ds}{dt} = -gft + C_1$$

odtud

$$\int ds = \int (-gft + C_1) dt$$

$$s = -\frac{gft^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (2)$$

Integrační konstanty C_1 , C_2 určíme z okrajových podmínek. Pro počátek pohybu platí: $s = 0$, $t = 0$. Dosazením do rovnice (2) obdržíme

$$C_2 = 0$$

Na konci pohybu je $s = s_1$, $t = t_1$, $v = 0$. Dosazením do rovnice (1) obdržíme

$$C_1 = gft_1$$

Konstanty C_1 , C_2 dosadíme do rovnice (2), při čemž na konci pohybu je $s = s_1$, $t = t_1$, takže dráha

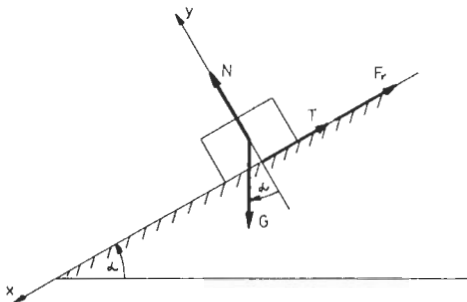
$$s_1 = -\frac{gft_1^2}{2} + gft_1^2 = \frac{gft_1^2}{2}$$

odtud

$$f = \frac{2s_1}{gt_1^2} = \frac{2 \cdot 8}{9,81 \cdot 3^2} = 0,181$$

Příklad 49.

Vyšetřete pohyb tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině dolů za předpokladu, že na ně působí třecí síla a odpor proti pohybu $P_r = b \cdot v$, kde b je součinitel lineárního odporu. Úhel nakloněné roviny je α , součinitel smykového tření f , počáteční rychlost je nulová.



Obr. 49

Řešení:

Těleso, které považujeme za hmotný bod, koná pohyb po přímce. Na těleso působí síly G , N , T , F_r . Souřadný systém je vhodné zvolit tak, že jedna osa je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, obr. 49. Pohybová rovnice ve směru osy x bude

$$m \cdot a = G \sin \alpha - T - F_r$$

Ve směru osy y není pohyb, proto druhá rovnice bude pouze statická podmínka rovnováhy

$$N - G \cos \alpha = 0$$

Pro třecí sílu platí $T = N \cdot f$. Dosazením do pohybové rovnice obdržíme

$$m \cdot a = G \sin \alpha - G f \cos \alpha - b v$$

úpravou

$$a = \frac{G}{m} (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{b}{m} v$$

Pro zjednodušení zavedeme

$$\frac{G}{m} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = A$$

tedy

$$a = A - \frac{b}{m} v$$

Dosadíme $a = \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = A - \frac{b}{m} v$$

separací proměnných

$$\int_0^v \frac{dv}{A - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt$$

po integraci a úpravě

$$-\frac{m}{b} \left[\ln \left(A - \frac{b}{m}v \right) - \ln A \right] = t$$

vyjádříme rychlost

$$v = \frac{mA}{b} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{b}{m}t}} \right) = \frac{G}{b} (\sin \alpha - f \cos \alpha) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

Dále dosazením $v = \frac{ds}{dt}$ bude

$$\frac{ds}{dt} = \frac{mA}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

separací proměnných

$$\int_0^x ds = \frac{mA}{b} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) dt$$

integrací a úpravou

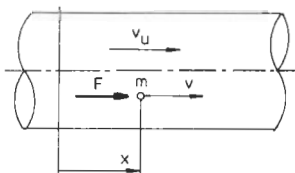
$$x = \frac{mA}{b} t - \frac{m^2 A}{b^2} \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right)$$

Po dosazení konstanty A je dráha

$$x = \frac{G}{b} (\sin \alpha - f \cos \alpha) t - \frac{m}{b} \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right)$$

Příklad 50.

Na zrno dopravované proudem vzduchu ve vodorovném potrubí, působí síla úměrná druhé mocnině relativní rychlosti vzhledem k unášejícímu proudu vzduchu $F = K(v_u - v)^2$, kde K je konstanta, v_u je unášivá rychlost proudu vzduchu, v je výsledná rychlost zrna. Napište rovnici dráhy rychlosti a zrychlení zrna v potrubí, je-li dána hmotnost zrna m , počáteční rychlost $v_0 = 0$, $v_u = \text{konst}$, při čemž $v_u \gg v$.



Řešení:

Uvažujeme, že tíhová síla je zanedbatelná, takže na zrno působí pouze síla F, obr. 50.

Pohybová rovnice je

$$m \cdot a = F$$

$$m \cdot a = K(v_u - v)^2 \quad (1)$$

Dosažením $a = \frac{dv}{dt}$ bude

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{m} (v_u - v)^2$$

separací proměnných

$$\int_0^v \frac{dv}{(v_u - v)^2} = \frac{K}{m} \int_0^t dt$$

integrací obdržíme

$$\frac{1}{v_u - v} - \frac{1}{v_u} = \frac{K}{m} t$$

po úpravě bude rychlost zrna

$$v = \frac{Kv_u^2 t}{Kv_u t + m}$$

Dále dosadíme $v = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Kv_u^2 t}{Kv_u t + m} ; \quad \int_0^s ds = \int_0^t \frac{Kv_u^2 t}{Kv_u t + m} dt$$

odtud po integraci

$$s = v_u t - \frac{m}{K} \ln \frac{m + Kv_u t}{m}$$

Zrychlení zrna v závislosti na čase určíme buď dosažením rychlosti v do vztahu (1) nebo derivací rychlosti podle času

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{Kmv_u^2}{(m + Kv_u t)^2}$$

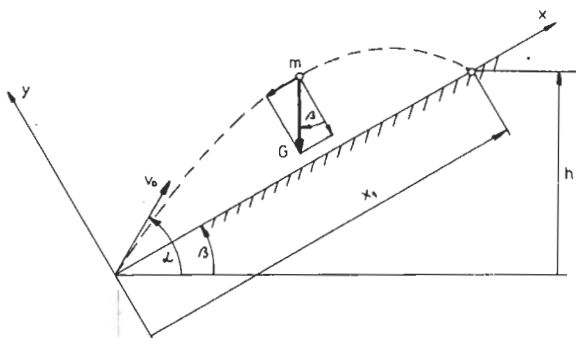
7.2. Pohyb po křivce

Příklad 51.

Z trubky vzduchového dopravníku vyletuje zrno o hmotnosti m , rychlostí v_0 a dopadá na nakloněnou rovinu. Určete výšku dopadu zrna h a dobu letu t_1 , svírali trubka s horizontální rovinou úhel α a nakloněná rovina úhel β , obr. 51. Odpor prostředí neuvažujte.

Řešení:

Předpokládáme, že zrno koná rovinný pohyb v neodporujícím prostředí (šikmý vrh). Souřadný systém zvolíme např. tak, že osa x je totožná se stopou nakloněné roviny. Zrno (hmotný bod) uvolníme, obr. 51, působí zde jediná síla, vlastní tíha. Protože se jedná o rovinný pohyb, budeme psát pohybové rovnice ve směru osy x a osy y . Platí


 χ_c

Obr. 51

$$m \cdot a_x = -G \sin \beta$$

$$m \cdot a_y = -G \cos \beta$$

Rovnice upravíme

$$a_x = -g \sin \beta$$

$$a_y = -g \cos \beta$$

dosadíme

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Po integraci obdržíme

$$v_x = -gt \sin \beta + C_1$$

$$v_y = -gt \cos \beta + C_2$$

dále dosadíme

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

po integraci bude

$$x = -\frac{gt^2}{2} \sin \beta + C_1 t + C_3$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} \cos \beta + C_2 t + C_4$$

Integrační konstanty C_1, C_2, C_3, C_4 určíme z okrajových podmínek. V okamžiku, kdy zrno opouští trubku platí ve směru osy x : $t = 0, x = 0, v_x = v_0 \cos(\alpha - \beta)$, po dosazení bude

$$C_3 = 0; \quad C_1 = v_0 \cos(\alpha - \beta)$$

Ve směru osy y platí: $t = 0, y = 0, v_y = v_0 \sin(\alpha - \beta)$, po dosazení

$$C_4 = 0; \quad C_2 = v_0 \sin(\alpha - \beta)$$

Dosažením integračních konstant do rovnic pro dráhu obdržíme

$$x = v_0 \cos(\alpha - \beta)t - \frac{gt^2}{2} \sin \beta$$

$$y = v_0 \sin(\alpha - \beta)t - \frac{gt^2}{2} \cos \beta$$

Dobu letu zrna t_1 určíme z rovnice dráhy ve směru osy y . V okamžiku dopadu zrna na nakloněnou rovinu bude $y = 0$, tedy

$$0 = v_0 \sin(\alpha - \beta)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \cos \beta$$

odtud

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

Z rovnice dráhy ve směru osy x určíme odlehlost x_1 dosažením t_1

$$x_1 = v_0 \cos(\alpha - \beta) \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} - \frac{2v_0^2 \operatorname{tg} \beta \sin^2(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

Výšku dopadu zrna určíme z obr. 51

$$h = x_1 \sin \beta$$

po dosažení

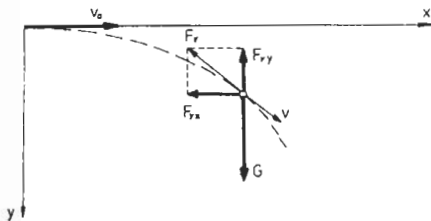
$$h = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{tg} \beta \left[\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \beta \right]$$

Příklad 52.

Vyšetřete pohyb hmotného bodu vrženého ve vodorovném směru rychlostí v_0 . Uvažujme, že bod se pohybuje v prostředí, které mu klade odpor úměrný druhé mocnině rychlosti $F_R = c \cdot v^2$, kde c je součinitel kvadratického odporu, obr. 52.

Řešení:

Jedná se o rovinný pohyb hmotného bodu (vodorovný vrh) v odporujícím prostředí. Budeme předpokládat, že $c = \text{konst.}$, a že odpor po celou dobu pohybu je úměrný čtverci rychlosti. Odpor prostředí ve skutečnosti působí proti rychlosti (pohybu) bodu, z důvodu jednoduššího matematického řešení budeme však pohyb řešit ve složkách. Zvolíme souřadný systém x, y a odpor



rozložíme do složek F_{rx} , F_{ry} , neboť platí $\vec{F}_r = \vec{F}_{rx} + \vec{F}_{ry}$.

Ve směru osy x na bod působí pouze síla F_{rx} , ve směru osy y tíhová síla G a F_{ry} . Pohybové rovnice budou

$$m \cdot a_x = - F_{rx}$$

$$m \cdot a_y = G - F_{ry}$$

nebo

$$m \cdot a_x = - c v_x^2$$

$$m \cdot a_y = G - c v_y^2$$

Nejdříve provedeme matematické řešení diferenciální rovnice ve směru osy x

$$a_x = - \frac{c}{m} v_x^2$$

Dosadíme $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

$$\frac{dv_x}{dt} = - \frac{c}{m} v_x^2$$

po separaci proměnných, při čemž $v_{0x} = v_0$

$$\int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x^2} = - \frac{c}{m} \int_0^t dt$$

a integraci

$$- \frac{1}{v_x} + \frac{1}{v_0} = - \frac{c}{m} t$$

odtud

$$v_x = \frac{m v_0}{m + c v_0 t}$$

Dosazením $v_x = \frac{dx}{dt}$ a separaci proměnných

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{m v_0}{m + c v_0 t} dt$$

Po integraci a úpravě obdržíme rovnici dráhy ve směru osy x

$$x = \frac{m}{c} \ln \left(1 + \frac{c v_0}{m} t \right)$$

Dále budeme řešit diferenciální rovnici ve směru osy y

$$a_y = \frac{G}{m} - \frac{c}{m} v_y^2$$

$$G = mg$$

$$a_y = g - \frac{c}{m} v_y^2$$

Dosadíme

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{c}{m} v_y^2$$

separací proměnných a úpravou, při čemž $v_{oy} = 0$, bude

$$\frac{1}{g} \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{1 - \frac{c}{mg} v_y^2} = \int_0^t dt$$

Dále zavedeme

$$\frac{1}{1 - k^2 v_y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + kv_y} + \frac{1}{1 - kv_y} \right); \text{ kde } k^2 = \frac{c}{mg}$$

dosazením, integrací a úpravou obdržíme

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{cg}} \left[\ln \left(1 + \sqrt{\frac{c}{mg}} v_y \right) - \ln \left(1 - \sqrt{\frac{c}{mg}} v_y \right) \right] = t$$

další úpravou obdržíme vztah pro rychlost ve směru osy y v závislosti na čase

$$v_y = \frac{e^{2\sqrt{\frac{cg}{m}} t} - 1}{\sqrt{\frac{c}{mg}} (e^{2\sqrt{\frac{cg}{m}} t} + 1)}$$

Výraz na pravé straně rovnice upravíme

$$v_y = \sqrt{\frac{mg}{c}} \frac{e^{\sqrt{\frac{cg}{m}} t} - e^{-\sqrt{\frac{cg}{m}} t}}{e^{\sqrt{\frac{cg}{m}} t} + e^{-\sqrt{\frac{cg}{m}} t}}$$

protože hyperbolická funkce $\operatorname{tgh} x$ je obecně definována vztahem

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

obdržíme po dosazení výraz pro rychlost

$$v_y = \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{cg}{m}} t$$

Pro výpočet dráhy ve směru osy y , dosadíme do poslední rovnice $v_y = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{cg}{m}} t$$

separací proměnných dostaneme

$$\int_0^y dy = \sqrt{\frac{mg}{c}} \int_0^t \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{cg}{m}} t \, dt \quad ; \quad \int \operatorname{tgh} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax)$$

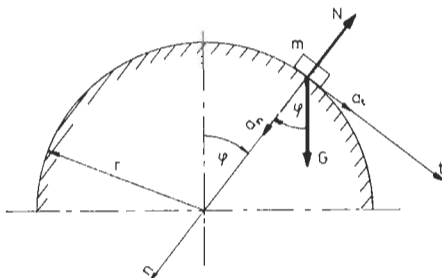
Integrací poslední rovnice a úpravou obdržíme

$$y = \frac{m}{c} \ln \left(\cosh \sqrt{\frac{cg}{m}} t \right) \quad \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Příklad 53.

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje působením vlastní tíhové síly z klidové polohy v nejvyšším bodě polokoule po jejím povrchu. Určete v kterém místě se bod oddělí od polokoule a jakou bude mít rychlost. Smykové tření a odpor vzduchu neuvažujte.



Obr. 53

tečny obdržíme

$$a_t = g \sin \varphi$$

Protože nesledujeme časovou závislost (řešení je matematicky složitější), použijeme vztahy

$$a = \frac{vdv}{ds} ; \quad ds = r d\varphi$$

dosazením

$$\frac{vdv}{r d\varphi} = g \sin \varphi$$

$$\int_0^v v dv = gr \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi$$

po integraci a úpravě

$$v^2 = 2gr(1 - \cos \varphi)$$

Řešení:

Při pohybu na hmotný bod působí tíhová síla G a reakce ve směru normály, obr. 53. V případech, kdy je určena trajektorie hmotného bodu (vazba bodu na křivku) používáme většinou přirozený souřadný systém (právní trojhran). Pohybové rovnice napíšeme ve směru tečny a normály. Platí

$$m \cdot a_t = G \sin \varphi$$

$$m \cdot a_n = G \cos \varphi - N$$

Řešením rovnice ve směru

V místě, ve kterém se hmotný bod oddělí od povrchu polokoule, bude reakce N rovná nule. Do pohybové rovnice ve směru normály tedy dosadíme: $N = 0$, $a_n = \frac{v^2}{r}$, $\varphi = \varphi_0$

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \varphi_0$$

Odtud

$$\cos \varphi_0 = \frac{v^2}{gr}$$

a po dosazení rychlosti

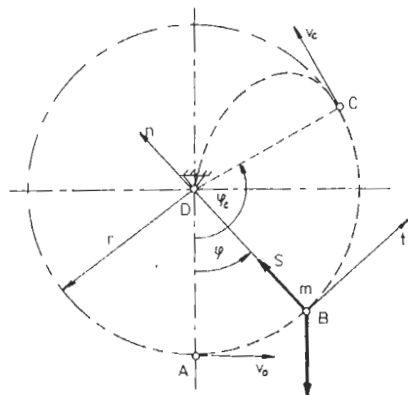
$$\cos \varphi_0 = \frac{2gr(1 - \cos \varphi_0)}{gr} ; \quad \cos \varphi_0 = \frac{2}{3}$$

Dosazením úhlu φ_0 do vztahu (1) obdržíme rychlost v okamžiku oddělení bodu od plochy

$$v_0^2 = 2gr\left(1 - \frac{2}{3}\right); \quad \text{odtud} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

Příklad 54.

Hmotný bod, který je zavěšen na nehmotném vlákně, se v nejnižší poloze začal pohybovat rychlostí v_0 . Jeho pohyb nahoru je z počátku po kružnici, síla ve vlákně postupně klesá až v určitém okamžiku je nulová a bod se začne pohybovat volně prostorem. Určete rychlost v_0 tak, aby bod při pohybu dolů prošel bodem závěsu vlákna, obr. 54. Odpor prostředí a tuhost vlákna zanedbejte.



Řešení:

rozdělíme na dvě části.

V první části se bod pohybuje po kružnici z bodu A do bodu C a ve druhé části se jedná o šikmý vrh v bezodporujícím prostředí. Pro první část řešení nakreslíme bod v poloze B, zvolíme souřadný systém a napíšeme pohybové rovnice

$$m \cdot a_t = -G \sin \varphi$$

$$m \cdot a_n = S - G \cos \varphi$$

Místo, ve kterém síla ve vlákně klesne na nulu je označen bodem C. Jeho rychlost v_C vypočteme z pohybové rovnice ve směru normály

$$S = 0; \quad a_n = \frac{v^2}{r} ; \quad G = mg$$

po dosazení

$$v_C^2 = -gr \cos \varphi_C \quad (1)$$

Úhel vlákna φ_C vypočteme z pohybové rovnice ve směru tečny. Platí

$$a = \frac{d(v^2)}{2ds} = \frac{d(v^2)}{2rd\varphi}$$

$$\frac{d(v^2)}{2rd\varphi} = -g \sin \varphi$$

$$d(v^2) = 2rg \sin \varphi d\varphi$$

$$v_C^2 = v_0^2 + 2rg(\cos \varphi_0 - 1) \quad (2)$$

Dosazením rovnice (1) do (2) obdržíme úhel φ_C

$$-gr \cos \varphi_C = v_0^2 + 2rg(\cos \varphi_C - 1)$$

$$\cos \varphi_C = \frac{2rg - v_0^2}{3rg} \quad (3)$$

$$\varphi_C = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3rg}\right)$$

Dosazením vztahu (3) do rovnice (1) obdržíme rychlost v bodě C

$$v_C = \sqrt{\frac{1}{3}(v_0^2 - 2rg)}$$

Pro řešení v další části (šikmý vrh), zvolíme v bodě C nový souřadný systém x, y. Pro úhel α platí

$$\alpha = \varphi_C - \varphi_0$$

Uvolnění hmotného bodu v bodě C je na obr. 54.1. Pohybové rovnice jsou, ve směru osy x

$$m \cdot a_x = 0$$

$$a_x = 0$$

řešením

$$v_x = \text{konst} = v_{Cx}$$

$$x = v_C \cos \alpha t$$

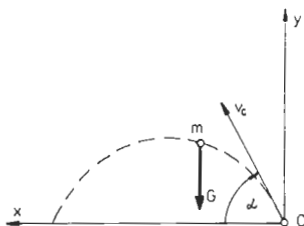
Ve směru osy y

$$m \cdot a_y = -G$$

$$a_y = -g$$

$$v_y = v_{Cy} - gt$$

$$y = v_C \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$



Obr. 54.1

Vyloučením času t , obdržíme rovnici dráhy $y(x)$. Tedy

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

pro $\alpha = \alpha^* = \varphi_c$

$$y = -x \operatorname{tg} \varphi_c - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi_c} x^2$$

což je rovnice paraboly. Aby tato parabola procházela bodem D, musí platit

$$y = r \cos \varphi_c$$

$$x = r \sin \varphi_c$$

tedy

$$r \cos \varphi_c = -r \sin \varphi_c \operatorname{tg} \varphi_c - \frac{gr^2 \sin^2 \varphi_c}{v_0^2 \cos^2 \varphi_c} \quad (4)$$

Po dosazení vztahu (1) do (4) bude

$$r \cos \varphi_c = -r \sin \varphi_c \operatorname{tg} \varphi_c - \frac{r^2 \sin^2 \varphi_c}{2(-gr \cos \varphi_c) \cos^2 \varphi_c}$$

úpravou

$$\cos \varphi_c = -\frac{\sin^2 \varphi_c}{\cos \varphi_c} + \frac{\sin^2 \varphi_c}{2 \cos \varphi_c \cos^2 \varphi_c}$$

a dále dosazením

$$\sin^2 \varphi_c = 1 - \cos^2 \varphi_c$$

obdržíme

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_c} \left(\frac{1}{2 \cos^2 \varphi_c} - \frac{3}{2} \right) = 0$$

Z poslední rovnice, která má dva kořeny, určíme úhel φ_c . Řešení $\frac{1}{\cos^2 \varphi_c} = 0$ nemá reálný smysl. Řešením

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_c} = 3$$

obdržíme

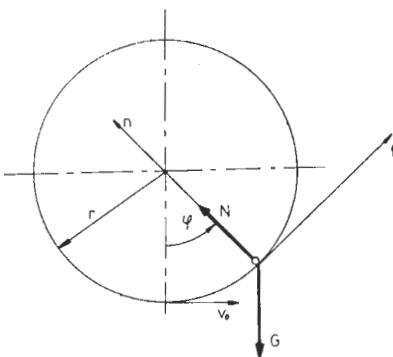
$$\cos \varphi_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a dosazením do vztahu (3) bude hledaná rychlost

$$v_0 = \sqrt{rg(2 - \sqrt{3})}$$

Příklad 55.

Hmotný bod, který je uvnitř svislé kružnice se začal pohybovat v nejnižší poloze počáteční rychlostí v_0 . Určete dobu potřebnou k dosažení horní polohy, závislost reakce na poloze a minimální rychlost v_0 , kterou musí mít bod, aby proběhl vrchol kružnice a neodpadl. Tření a odpory proti pohybu neuvažujte.



Obr. 55

Řešení:

Pohyb hmotného bodu je vázán na dokonale hladkou válcovou plochu (kružnici). Na bod působí síla tíže a reakce od podložky, obr. 55. Pro zvolený souřadný systém ve směru tečny a normály napíšeme pohybové rovnice

$$m \cdot a_t = -G \sin \varphi$$

$$m \cdot a_n = N - G \cos \varphi$$

Budeme řešit pohyb ve směru tečny, takže dosadíme

$$a_t = r \varphi'' = \frac{d(v^2)}{2ds} = \frac{d(v^2)}{2rd\varphi'}$$

tedy

$$a_t = -g \sin \varphi,$$

$$\frac{d(v^2)}{2rd\varphi'} = -g \sin \varphi$$

separací proměnných

$$\int_{v_0}^v d(v^2) = -2gr \int_0^\varphi \sin \varphi' d\varphi'$$

po integraci a úpravě obdržíme rychlost

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \varphi - 1)} \quad (1)$$

Dále dosadíme $v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt}$

$$\frac{rd\varphi}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \varphi - 1)}$$

po separaci proměnných

$$\int_0^t dt = \int_0^\varphi \frac{rd\varphi'}{\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \varphi' - 1)}}$$

pravou stranu rovnice upravíme

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin^2 \varphi'$$

a provedeme substituci $\frac{\varphi}{2} = \psi$
 $d\varphi = 2d\psi$

$$t = 2r \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{v_0^2 \left(1 - \frac{4gr}{v_0^2} \sin^2 \psi\right)}}$$

dále zavedeme $\frac{4gr}{v_0^2} = k^2$; takže obdržíme

$$t = \frac{2r}{v_0} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

Příslušný integrál je úplným eliptickým integrálem prvního druhu, jehož řešení provedeme podle příručky "Rektorys: Přehled užití matematiky", kde je označen

$$F(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

Pro náš případ $\varphi = \pi$, t.j. $\psi = \frac{\pi}{2}$, $k^2 = \frac{4gr}{v_0^2}$; se omezíme pouze na první dva členy, takže výsledek bude přibližný

$$F(k, \frac{\pi}{2}) \approx \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi gr}{2v_0^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{gr}{v_0^2} = 1,88$$

Dosazením obdržíme čas

$$t \approx \frac{2r}{v_0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi gr}{2v_0^2} \right) = \frac{\pi r}{v_0} \left(v_0^2 + gr \right) = 0,38 s$$

Z pohybových rovnic ve směru normály vypočteme reakci

$$N = m \cdot a_n + G \cos \varphi \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

Dosazením vztahu (1) bude

$$N = m \left(\frac{\left[\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \varphi - 1)} \right]^2}{r} + g \cos \varphi \right) = m \left[\frac{v_0^2}{r} + g(3 \cos \varphi - 2) \right]$$

Nejmenší reakce bude při minimální hodnotě $\cos \varphi$, t.j. při $\cos \varphi = -1$, $\varphi = \pi$, což je v horní poloze, tedy

$$N_{\min} = m \left(\frac{v_0^2}{r} - 5g \right)$$

Aby nedošlo k odpadnutí bodu od kružnice, musí být $N > 0$, tedy $v_0^2 > 5gr$, čímž je určena též minimální počáteční rychlost v_0 .

Poznámka:

Řešení tohoto příkladu se často provádí pro malé úhly φ , pro které platí $\sin \varphi \approx \varphi$, takže nelineární diferenciální rovnice

$$r \varphi'' + g \sin \varphi = 0$$

$$a_t = r \cdot \varepsilon = r \cdot \varphi''$$

dostane tvar lineární diferenciální rovnice

$$\varphi'' + \frac{g}{r} \varphi = 0$$

jejíž řešení je provedeno v kapitole 8.1 - volné kmitání.

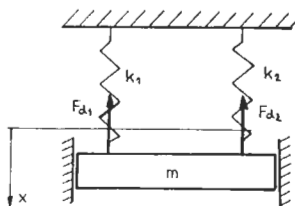
V příkladech 53, 55 neuvažujeme smykové tření, což je pouze z důvodu matematického řešení. Napsání pohybových rovnic za působení třecí síly a dalších odporů je jednoduché, avšak matematické řešení těchto rovnic je značně složité.

8.0. Kmitání s jedním stupněm volnosti

8.1. Volné kmitání

Příklad 57.

Určete dobu kmitu tělesa zavěšeného na dvou válcových pružinách, které jsou k tělesu připojeny vedle sebe, obr. 57. Je dána hmotnost tělesa $m = 0,5 \text{ kg}$ a tuhosti pružin $k_1 = 24 \text{ N.m}^{-1}$, $k_2 = 34 \text{ N.m}^{-1}$.



Obr. 57

Řešení:

Těleso zavěšené na pružinách koná volný kmitavý pohyb s jedním stupněm volnosti. Předpokládejme, že pružiny jsou v rovnovážné poloze nezatíženy, t.zn., že nebudeme uvažovat předpětí pružin ani tíhovou sílu (uvedené síly jsou v rovnováze). Na těleso tedy působí síly pouze od pružin.

Pohybová rovnice bude

$$m \cdot a = -F_{d1} - F_{d2}$$

Pro válcové pružiny, pokud jsou namáhány do meze úměrnosti, platí

lineární závislost mezi deformací a působící silou, tedy

$$F_{d1} = k_1 \cdot x ; \quad F_{d2} = k_2 \cdot x$$

Po dosazení do pohybové rovnice obdržíme

$$m \cdot a = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

úpravou

$$x'' + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0 \quad \ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

kde výraz $\frac{k_1 + k_2}{m} = \Omega^2$. Vlastní kruhová frekvence Ω tedy bude

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

a doba kmitu

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,5}{24 + 34}} = 0,583 \text{ s}$$

Z řešení vidíme, že dvě pružiny zapojené vedle sebe můžeme nahradit jednou pruži-

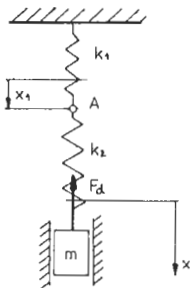
nou, kde výsledná tuhost se rovná součtu tuhostí obou pružin.

Pro pružiny připojené k tělesu vedle sebe obecně platí, že výsledná tuhost

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

Příklad 58.

Určete dobu kmitu tělesa zavěšeného na dvou pružinách připojených k tělesu za sebou, obr. 58. Je dána hmotnost $m = 0,5 \text{ kg}$, tuhosti $k_1 = 24 \text{ N.m}^{-1}$, $k_2 = 34 \text{ N.m}^{-1}$.



Řešení:

Uvažujme, že pružiny jsou v rovnovážné poloze nezatiženy. Při vyohýlení tělesa z rovnovážné polohy o délku x se poloha bodu A, ve kterém jsou pružiny spojeny, vychýlí o délku x_1 a v pružinách budou síly (neuvažujeme předpětí pružin)

$$F_{d1} = k_1 x_1 \quad ; \quad F_{d2} = k_2 (x - x_1)$$

Pohybová rovnice bude

$$m \cdot \ddot{x} = -k_2 (x - x_1)$$

V bodě A musí být rovnováha sil, proto platí

$$k_1 x_1 = k_2 (x - x_1)$$

odtud

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x$$

Po dosazení do pohybové rovnice a úpravě obdržíme diferenciální rovnici

$$\ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} x = 0$$

Doba kmitu tělesa bude

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} m} = 2\pi \sqrt{\frac{24 + 34}{24 \cdot 34} 0,5} = 1,184 \text{ s}$$

Dvě pružiny připojené k tělesu za sebou, můžeme nahradit jednou pružinou jejíž výsledná tuhost je

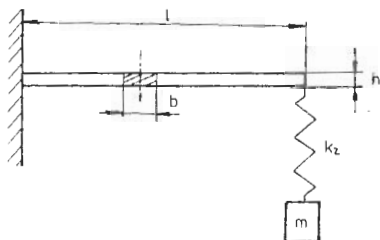
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

obecně

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Příklad 59.

Určete dobu kmitu a frekvenci tělesa zavěšeného na válcové pružině, která je připevněna na konec vetknutého ocelového nosníku, který považujeme za listovou pružinu, obr. 59. Je dána hmotnost tělesa $m = 10 \text{ kg}$, tuhost válcové pružiny $k_2 = 1500 \text{ N.m}^{-1}$, modul pružnosti materiálu listové pružiny $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$, rozměry listové pružiny $l = 0,8 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $b = 0,05 \text{ m}$.



Obr. 59

Řešení:

Uvažujeme, že pohyb tělesa je pouze ve svislém směru. Tuhost listové pružiny k_1 vypočteme ze vztahu pro jednotkovou deformaci, t.j. z posunutí konce nosníku ve svislém směru. Je dána vztahem

$$k_1 = \frac{3EI}{l^3}$$

kde E je modul pružnosti v tahu, I moment setrvačnosti průřezu; pro obdelníkový průřez v nakreslené poloze je

$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Po dosazení

$$k_1 = \frac{3Ebh^3}{12 \cdot l^3} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,05 \cdot 0,01^3}{12 \cdot 0,8^3} = 5127 \text{ N.m}^{-1}$$

Protože pohyb uvažujeme pouze ve svislém směru, můžeme připojení pružin k tělesu považovat za spojení v sérii (za sebou - viz př. 58). Pro výslednou tuhost tedy platí

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Odtud doba kmitu

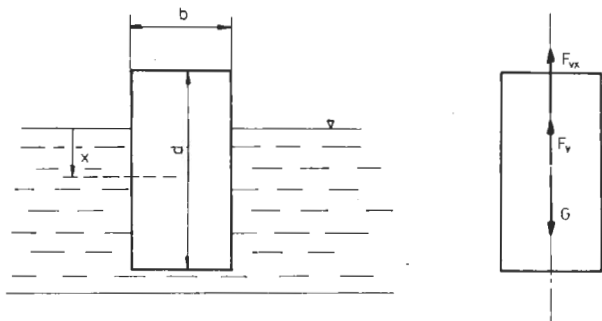
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} m} = 2\pi \sqrt{\frac{5127 + 1500}{5127 \cdot 1500} 10} = 0,583 \text{ s}$$

a frekvence kmitání

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,583} = 1,71 \text{ s}^{-1}$$

Příklad 60.

Hranol hmotnosti $m = 30 \text{ kg}$, rozměrů $b = 0,4 \text{ m}$, $c = 0,4 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$ je ponořen do kapaliny hustoty $\rho = 1000 \text{ kg.m}^3$. Určete rovnici dráhy a dobu kmitu, jestliže hranol vychýlíme z rovnovážné polohy o vzdálenost $x_0 = 0,2 \text{ m}$ a pustíme jej, obr. 60.



Obr. 60

Řešení:

V rovnovážné poloze jsou tíhová síla hranolu a vztlaková síla v rovnováze

$$G = P_v$$

odtud můžeme vypočítat, jak hluboko je hranol ponořen do kapaliny jestliže je v klidu

$$mg = b \cdot c \cdot x_{st} \cdot \rho \cdot g$$

$$x_{st} = \frac{m}{bc\rho} = \frac{30}{0,4 \cdot 0,4 \cdot 1000} = 0,1875 \text{ m}$$

Vychýlíme-li hranol z rovnovážné polohy o vzdálenost x , změní se vztlaková síla o hodnotu

$$F_{vx} = b \cdot c \cdot x \cdot \rho \cdot g$$

Protože veličiny b, c, ρ, g jsou konstantní můžeme vztlakovou sílu považovat za direkční sílu, která vrací hranol do rovnovážné polohy a její velikost je přímo úměrná výchylce x . Při zanedbání pasivních odporů, bude hranol vykonávat volný kmitavý pohyb.

Pohybová rovnice hranolu, pro souřadný systém zvolený v rovnovážné poloze bude

$$m \cdot a = - F_{vx}$$

Úpravou obdržíme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho \text{cbg}}{m} x = 0$$

kde $\frac{\rho \text{cbg}}{m} = \Omega^2$ je vlastní kruhová frekvence. Řešení této rovnice je

$$x = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

kde A je amplituda výchylky, φ - fázový posuv.

Pro počáteční podmínky $x = x_0 = 0,2 \text{ m}$, $v = v_0 = 0$, $t = t_0 = 0$, bude

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} = \sqrt{0,2^2} = 0,2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \Omega^2}{v_0} = \infty ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

takže rovnice dráhy bude

$$x = 0,2 \sin \left(\sqrt{\frac{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,49,81}{30}} t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,2 \cos 7,23 t$$

a doba kmitu

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho \text{cbg}}} = 2\pi \sqrt{\frac{30}{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,49,81}} = 0,869 \text{ s}$$

Příklad 61.

Při spouštění klece výtahu konstantní rychlostí v_0 se náhle zasekl vrchní konec lana. Určete maximální sílu v laně, maximální prodloužení lana vlivem dynamického zatížení, vlastní kruhovou frekvenci a dobu kmitu klece pro dané hodnoty: hmotnost klece $m = 2000 \text{ kg}$, tuhost lana $k = 4 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$, $v_0 = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$. Hmotnost lana a pasivní odpory neuvažujte.

Řešení:

Při rovnoměrném pohybu, obr. 61, je síla v laně rovna tíhové síle klece

$$G = m \cdot g = 2000 \cdot 9,81 = 19620 \text{ N}$$

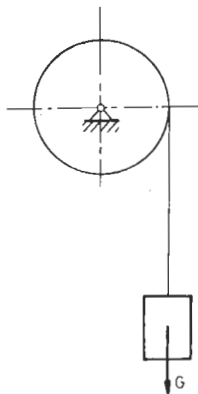
V okamžiku, kdy se lano zasekne, bude klec konat volný kmitavý pohyb, neboť lano můžeme považovat za pružinu s danou tuhostí k , obr. 61.1. Pohybová rovnice pro klec bude

$$m \cdot a = G - F_d$$

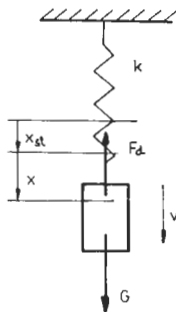
při čemž síla v laně je

$$F_d = k(x_{st} + x)$$

kde x_{st} značí statické prodloužení lana, které určíme z rovnovážného stavu, kdy je



Obr. 61



Obr. 61.1

klec v klidu nebo rovnoměrném pohybu, platí

$$G = k x_{st}$$

Dosažením tohoto výrazu do pohybové rovnice

$$m \cdot a = G - k x_{st} - k x$$

a úpravou obdržíme

$$m \cdot a = -k x$$

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0$$

což je rovnice volného harmonického kmitání. Řešením této rovnice obdržíme

$$x = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

kde amplitudu výchylky A a počáteční fázi φ určíme z počátečních podmínek $x = 0$, $v = v_0$, $t = 0$, které dosadíme do vztahů

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \Omega}{v_0} \quad ; \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

Odtud

$$A = \sqrt{0 + \frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{2000,0,8^2}{4 \cdot 10^5}} = 0,056 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0 \cdot \Omega}{v_0} = 0, \text{ odtud } \varphi = 0$$

Amplituda výchylky A určuje maximální prodloužení lana vlivem dynamického zatížení. Vlastní kruhovou frekvenci určíme

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5}{2000}} = 14,14 \text{ s}^{-1}$$

dobu kmitu

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,44 \text{ s}$$

Maximální síla v laně bude součtem tíhové síly a maximální dynamické síly

$$S_{\max} = G + S_{\text{dyn}} ; \quad S_{\text{dyn}} = k \cdot A = 4 \cdot 10^5 \cdot 0,056 = 22400 \text{ N}$$

$$S_{\max} = 19620 + 22400 = 42020 \text{ N}$$

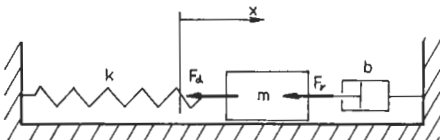
8.2. Kmitavý pohyb tlumený odporem úměrným rychlosti

Příklad 62.

Těleso připojené k válcové pružině a k tlumiči, jehož odpor je úměrný rychlosti, bylo vychýleno z rovnovážné polohy o délku $x_0 = 0,1 \text{ m}$ a uvolněno, obr. 62. Určete rovnici dráhy, dobu kmitu a logaritmický dekrement pro následující hodnoty. Hmotnost tělesa $m = 3 \text{ kg}$, pružina se silou 20 N protáhne o $0,05 \text{ m}$, při rychlosti $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je odpor tlumiče: a) $0,2 \text{ N}$

b) 20 N .

Pasivní odpory neuvažujte.



Obr. 62

Řešení:

Těleso vykonává kmitavý pohyb tlumený odporem úměrným rychlosti. Na těleso při pohybu působí pouze direkční síla F_d a síla od tlumiče F_r . Třecí sílu ani další odpory neuvažujeme.

Pohybová rovnice bude

$$m \cdot a = -F_d - F_r$$

jejíž řešení je

$$y_{32} = y_0 + \frac{gt^2}{2}$$

Velikost reakce N určíme z rovnice ve směru osy z , odkud

$$N = 2m \omega_{21}^2 x_{32}'$$

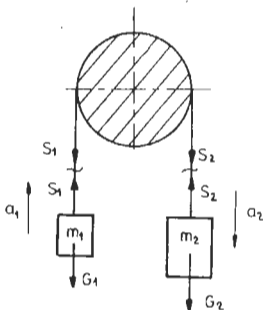
Po dosazení relativní rychlosti, kterou obdržíme derivací relativní dráhy podle času (viz příkl. 69, str. 130), bude

$$N = 2m \omega_{21}^2 x_0 \sinh(\omega_{21} t)$$

10.0. Soustavy hmotných bodů

Příklad 71.

Na laně vedeném přes drsnou válcovou plochu jsou na obou koncích zavěšena tělesa s hmotnostmi $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, obr. 71. Součinitel smykového tření mezi lanem a válcovou plochou $f = 0,1$, úhel opásání $\beta = 180^\circ$. Určete zrychlení těles a síly v laně za předpokladu, že lano je dokonale ohebné a jeho hmotnost je zanedbána.



Obr. 71

Řešení:

Tělesa vykonávají posuvný pohyb, proto je můžeme považovat za hmotné body (soustavu hmotných bodů). Pro řešení použijeme metodu uvelňování, při níž pro každý uvelněný bod napíšeme pohybovou rovnici. Uvažujeme, že při pohybu bude bod s hmotností m_2 klesat, obr. 71.

Pohybové rovnice jsou

$$m_1 a_1 = S_1 - G_1$$

$$m_2 a_2 = G_2 - S_2$$

Tyto rovnice doplníme kinematickou závislostí

$$a_1 = a_2 = a$$

a dále Eulerovým vztahem pro vláknové tření

$$S_2 = S_1 e^{f\beta}$$

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$S_1 = m_1 a + G_1 = m_1 (a + g)$$

$$S_2 = G_2 - m_2 a = m_2 (g - a)$$

dosazením do Eulerova vztahu

$$m_2(g - a) = m_1(a + g)e^{f\beta}$$

odtud zrychlení

$$a = \frac{g(m_2 - m_1 e^{f\beta})}{m_2 + m_1 e^{f\beta}} = \frac{9,81(15 - 3e^{0,1 \cdot \pi})}{15 + 3e^{0,1 \cdot \pi}} = 5,59 \text{ m.s}^{-2}$$

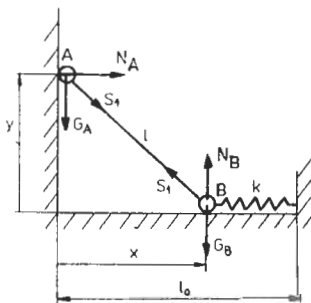
Dále vypočteme síly v laně

$$S_1 = m_1(a + g) = 3(5,59 + 9,81) = 46,2 \text{ N}$$

$$S_2 = m_2(g - a) = 15(9,81 - 5,59) = 63,3 \text{ N}$$

Příklad 72.

Dva hmotné body A, B jsou spojeny tuhou nehmotnou tyčí délky l , obr. 72. Bod A je veden po svislé ploše, bod B po vodorovné ploše, přitom bod B je spojen s válečkovou pružinou délky l_0 a tuhosti k . Obě plochy jsou dokonale hladké. Tyč je na počátku ve svislé poloze a nepatrným posunutím bodu B ve směru osy x se dostane do pohybu. Určete rychlosti obou bodů pro obecnou polohu určenou souřadnicí $y > 0$, je-li klidová poloha bodů $y_0, x_0 = 0$.



Obr. 72

Řešení:

Uvažujeme, že pružina je dostatečně měkká, takže dojde k pohybu tyče. Pro soustavu hmotných bodů platí, že přírůstek kinetické energie soustavy hmotných bodů mezi dvěma polohami je dán prací vnějších sil mezi těmito polohami. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) - 0 &= \\ &= - \int_{y_0}^y G_A dy - \int_{x_0}^x kx dx \end{aligned}$$

po integraci obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) &= \\ &= -G_A(y - y_0) - k\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Protože se jedná o soustavu s jedním stupněm volnosti, jsou hodnoty x, y a v_A, v_B vázány vztahy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l^2 \\ x \cdot v_B + y \cdot v_A &= 0 \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vyjádříme

$$x^2 = l^2 - y^2$$

$$v_B = \frac{y \cdot v_A}{x} ; \quad v_B^2 = \frac{y^2 v_A^2}{x^2}$$

a dosadíme do první rovnice

$$\frac{1}{2} (m_A v_A^2 + m_B \frac{y^2 v_A^2}{x^2}) = -G_A (y - y_0) - k (\frac{l^2 - y^2 - x_0^2}{2})$$

Po úpravě a dosazení počáteční podmínky $x_0 = 0$, obdržíme rychlost bodu A v závislosti na odlehlosti y

$$v_A = \sqrt{\frac{[2 G_A (y_0 - y) + k (y^2 - l^2)] (l^2 - y^2)}{m_A (l^2 - y^2) + m_B y^2}}$$

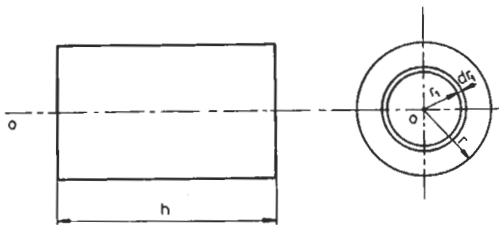
a rychlost bodu B

$$v_B = \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}} v_A$$

11.0. Momenty setrvačnosti

Příklad 73.

Určete hmotnostní moment setrvačnosti válce k jeho podélné ose. Je dán poloměr válce r, výška h, hustota ρ , obr. 73.



Obr. 73

Řešení:

Vytne element, jehož základna má tvar mezikruží a výšku h . Hmotnost elementu je

$$dm = 2\pi r_1 dr_1 h \varrho$$

elementární moment setrvačnosti

$$dI_0 = dm r_1^2 = 2\pi r_1^3 dr_1 h \varrho$$

Celkový moment setrvačnosti

$$I_0 = 2\pi h \varrho \int_0^r r_1^3 dr_1$$

po integraci

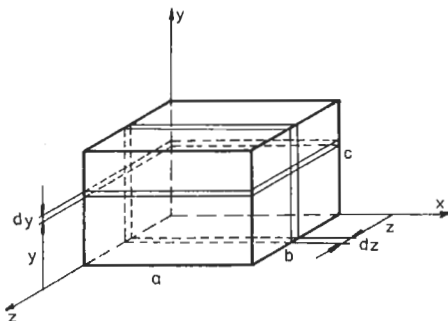
$$I_0 = 2\pi h \varrho \frac{r^4}{4}$$

Dosadíme-li do posledního vztahu hmotnost válece $m = \pi r^2 h \varrho$ obdržíme

$$I_0 = \frac{\pi r^2}{2}$$

Příklad 74.

Určete hmotnostní moment setrvačnosti pravoúhlého čtyřbokého hranolu k ose x procházející jeho hranou, obr. 74. Rozměry hranolu jsou a , b , c , hustota ϱ .



Obr. 74

Řešení:

Příklad můžeme řešit např. tak, že na tělese vytne elementární hranolek o rozměrech dx , dy , dz , použijeme vztah pro elementární moment setrvačnosti k ose x a trojnásobným integrálem určíme moment setrvačnosti celého tělesa. Toto řešení je poměrně obtížné, proto je výhodnější použít vztahu vyjadřující závislost mezi osovým a rovinovými momenty setrvačnosti

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

Pro rovinné momenty setrvačnosti platí (obr. 74)

$$dI_{xy} = dm \cdot z^2$$

kde $dm = a \cdot c \cdot dz \cdot \rho$, dosazením

$$I_{xy} = ac\rho \int_0^b z^2 dz = \frac{acb^3\rho}{3}$$

Podobně

$$\begin{aligned} dI_{xz} &= dm \cdot y^2 \\ dm &= a \cdot b \cdot dy \cdot \rho \\ I_{xz} &= ab\rho \int_0^c y^2 dy = \frac{abc^3\rho}{3} \end{aligned}$$

Hmotnost celého hranolu

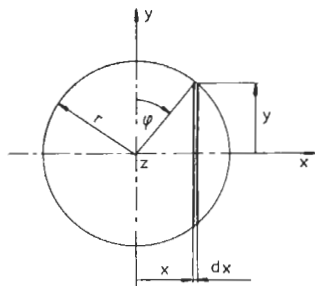
$$m = abc\rho$$

po dosazení obdržíme

$$I_x = \frac{acb^3\rho}{3} + \frac{abc^3\rho}{3} = \frac{m}{3} (b^2 + c^2)$$

Příklad 75.

Určete hmotnostní moment setrvačnosti koule k ose procházející jejím středem. Je dána hmotnost m , poloměr r , hustota ρ .



Obr. 75.1

Řešení:

Výpočet momentů setrvačnosti u většiny těles je možné provést různými způsoby. Proto si na zadaném příkladě ukážeme tři různé postupy při řešení.

- a) Ve středu koule zvolíme souřadný systém a ve vzdálenosti x vytne-
me element dx na poloměru y , obr.
75.1. Moment setrvačnosti elementu
k ose x bude

$$dI_x = \frac{1}{2} y^2 dm$$

kde $dm = \rho y^2 dx$

Z obr. 75.1 platí

$$x = r \sin \varphi \quad ; \quad dx = r \cos \varphi d\varphi$$

$$y = r \cos \varphi$$

Po dosazení bude moment setrvačnosti koule

$$I_x = \frac{1}{2} \pi \rho r^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi$$

Integraci výrazu $\cos^5 \varphi d\varphi$ provedeme podle redukčního vzorce

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \left[\frac{1}{5} \sin \varphi \cos^4 \varphi + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{15}$$

takže

$$I_x = \frac{1}{2} \pi \rho r^5 \frac{16}{15} = \frac{8}{15} \pi \rho r^5$$

po dosazení $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ bude

$$I_x = \frac{2}{5} m r^2$$

b) Použijeme vztahu mezi polárními a osovými momenty setrvačnosti, platí

$$I_p = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

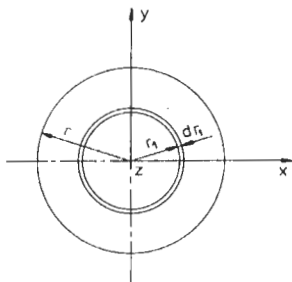
při čemž pro kouli platí

$$I_x = I_y = I_z$$

takže bude

$$I_x = \frac{2}{3} I_p$$

Polární moment setrvačnosti určíme, obr. 75.2



Obr. 75.2

dosazením

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

bude

$$I_p = \frac{3}{5} m r^2$$

a dále

$$I_x = \frac{2}{5} m r^2$$

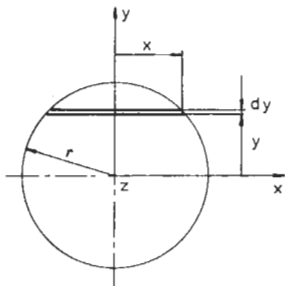
c) Osový moment setrvačnosti je roven součtu rovinným momentům setrvačnosti k rovinám navzájem kolmým, tedy

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}$$

pro kouli platí $I_{xz} = I_{xy}$, takže

$$I_x = 2 I_{xz}$$

Moment setrvačnosti k rovině xz určíme, obr. 75.3



Obr. 75.3

$$dI_{xz} = dm \cdot y^2$$

$$\text{kde } dm = \pi x^2 dy \rho$$

$$\text{a dále } x^2 = r^2 - y^2$$

po dosazení

$$I_{xz} = \pi \rho \int_{-r}^r (r^2 - y^2) y^2 dy = \frac{4}{15} \pi \rho r^5$$

takže

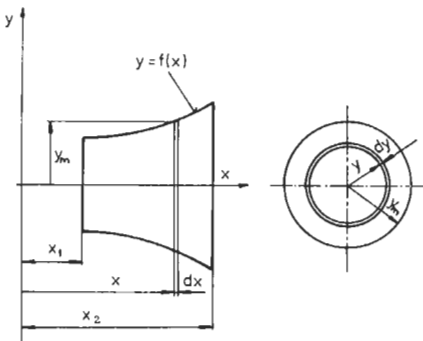
$$I_x = 2 I_{xz} = \frac{8}{15} \pi \rho r^5$$

$$\text{dosazením } m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad \text{bude}$$

$$I_x = \frac{2}{5} m r^2$$

Příklad 76.

Určete hmotnostní moment setrvačnosti rotačního tělesa, zobrazeného na obr. 76, k ose x pro obecnou funkci $y = f(x)$, je-li dána hustota tělesa ρ . Výpočet dále proveďte pro válec a kužel.



Obr. 76

Řešení:

Na tělese vytňeme elementární destičku dx a vypočteme její moment setrvačnosti k ose x (elementární hmotnost někdy vyjadřujeme druhým diferenciálem)

$$dI_{x_{el}} = 2\pi y dy \rho dx \cdot y^2$$

$$I_{x_{el}} = 2\pi \rho dx \int_0^{y_m} y^3 dy = 2\pi \rho dx \frac{y_m^4}{4}$$

Moment setrvačnosti celého tělesa obdržíme součtem momentů setrvačnosti elementárních destiček. Dříve však je nutné vyjádřit pořadnici y_m jako funkci x , $y_m = f(x)$

$$I_x = \frac{2\pi\rho}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^4 dx$$

Tento způsob používáme, jestliže při řešení nechceme pracovat s dvojným integrálem. Stejný výsledek obdržíme použijeme-li dvojný integrál

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{y_m} 2\pi \rho dx y^3 dy$$

Pro plný rotační válec je meridiánová křivka $y_m = r = \text{konst.}$, výška válce je h , takže

$$I_x = 2\pi \rho \int_0^h \int_0^r dx y^3 dy = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}$$

kde $m = \pi r^2 \rho h$.

U rotačního kužele je meridiánová křivka přímka, jejíž rovnice je $y_m = k \cdot x$, kde k je směrnice. Je-li výška kužele h , pak po dosazení bude

$$I_x = 2\pi \rho \int_0^h \int_0^{kx} dx y^3 dy = 2\pi \rho \int_0^h dx \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{kx} = 2\pi \rho \int_0^h \frac{k^4 x^4}{4} dx$$

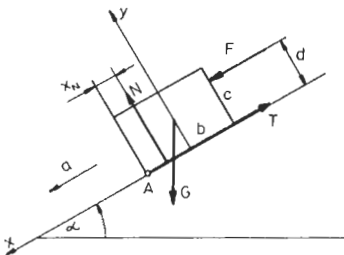
$$I_x = \frac{\pi \rho k^4 h^5}{10}$$

Pro $k = \frac{y}{x} = \frac{h}{r}$, bude moment setrvačnosti kužele k jeho ose rotace

$$I_x = \frac{\pi \rho r^4 h}{10}$$

12.0. Dynamika tělesa a soustav12.1. Dynamika tělesaPříklad 77.

Vyšetřete pohyb tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině za působení konstantní síly F . Je dána hmotnost m , rozměry b , c , d , součinitel smykového tření f , úhel nakloněné roviny α . Počáteční podmínky jsou $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $t_0 = 0$.



Obr. 77

Řešení:

Těleso koná posuvný pohyb. Protože toto těleso neuvažujeme jako hmotný bod (viz příkl. 49, str. 94), nemusí reakce N procházet těžištěm, obr. 77.

Pohybové rovnice jsou

$$x: \quad m \cdot a = G \sin \alpha + F - T \quad (1)$$

$$y: \quad 0 = N - G \cos \alpha \quad (2)$$

$$M_A: \quad m \cdot a \cdot \frac{c}{2} = N \cdot x_N - G \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} + G \sin \alpha \cdot \frac{c}{2} + F \cdot d \quad (3)$$

Rovnice doplníme vztahem pro smykové tření

$$T = N \cdot f$$

Řešením rovnic (1), (2) obdržíme

$$m \cdot a = G \sin \alpha + F - G f \cos \alpha$$

$$a = g \sin \alpha + \frac{F}{m} - g f \cos \alpha = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{F}{m}$$

Po integraci a dosazení počátečních podmínek

$$v = \left[g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{F}{m} \right] t$$

$$s = \left[g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{P}{m} \right] \frac{t^2}{2}$$

Z rovnice (3) vypočteme polohu reakce N

$$x_N = \frac{m a \frac{c}{2} + G \frac{b}{2} \cos \alpha - G \frac{c}{2} \sin \alpha - P d}{N}$$

po dosazení zrychlení a úpravě

$$x_N = \frac{G \cos \alpha (b - cf) + 2P(c - d)}{2Gf \cos \alpha}$$

Příklad 78.

Kotouč, který je uložen otočně, měl na počátku úhlovou rychlost $\omega_0 = 20 \frac{80}{s}$. Určete za jak dlouho se zastaví, jestliže byl brzděn pásovou brzdou, obr. 78, kde na volný konec pásu působila síla $F = 100 \text{ N}$. Hmotnost kotouče $m = 50 \text{ kg}$, poloměr $r = 0,3 \text{ m}$, součinitel smykového tření mezi pásem a kotoučem $f = 0,25$, úhel opásání $\beta = 180^\circ$. Dále určete kolikrát se kotouč během této doby otočí.

Řešení:

Smysl otáčení kotouče uvažujeme dle obr. 78 a dále předpokládáme, že součinitel tření mezi kotoučem a pásem je konstantní. Kotouč včetně pásu uvolníme a napíšeme pohybovou rovnici

$$I_0 \varepsilon = F \cdot r - S_1 \cdot r$$

Z Eulerova vztahu pro vláknové tření určíme závislost mezi silami F a S_1 , platí

$$S_1 = F \cdot e^{f\beta}$$

Obr. 78

po dosazení

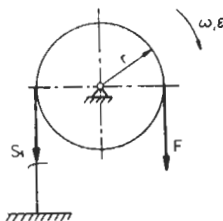
$$I_0 \varepsilon = Fr(1 - e^{f\beta})$$

$$\varepsilon = \frac{Fr(1 - e^{f\beta})}{I_0}$$

Moment setrvačnosti kotouče $I_0 = \frac{mr^2}{2}$, takže

$$\varepsilon = \frac{2F(1 - e^{f\beta})}{mr}$$

Dobu za jak dlouho se kotouč zastaví určíme



$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2F(1 - e^{f\beta})}{mr}$$

$$\int_{\omega_0}^0 d\omega = \frac{2F(1 - e^{f\beta})}{mr} \int_0^{t_1} dt$$

odtud

$$t_1 = - \frac{mr\omega_0}{2F(1 - e^{f\beta})} = - \frac{50 \cdot 0,3 \cdot 80}{2 \cdot 100(1 - e^{0,25\pi})} = 5,03 \text{ s}$$

Počet otočení vypočteme

$$\frac{d(\omega^2)}{2d\varphi} = \frac{2F(1 - e^{f\beta})}{mr}$$

takže

$$\int_{\omega_0}^0 d(\omega^2) = \frac{4F(1 - e^{f\beta})}{mr} \int_0^{\varphi_1} d\varphi$$

$$\varphi_1 = - \frac{mr\omega_0^2}{4F(1 - e^{f\beta})}$$

Dosazením $\varphi_1 = 2\pi n$, bude

$$n = - \frac{\varphi_1}{2\pi} = - \frac{mr\omega_0^2}{8\pi F(1 - e^{f\beta})} = - \frac{50 \cdot 0,3 \cdot 80^2}{8 \cdot 100(1 - e^{0,25\pi})} = 32 \text{ ot}$$

✓ Příklad 79.

Tenká tyč hmotnosti m , délky l je uchycena otočně ve vzdálenosti x od těžiště. Určete takovou vzdálenost x , aby doba kmitu tyče byla minimální, obr. 79.

Řešení:

Pohybová rovnice tyče bude

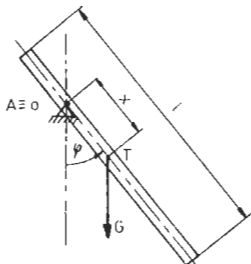
$$I_0 \varepsilon = -G \sin \varphi \cdot x$$

pro malé úhly můžeme psát $\sin \varphi \approx \varphi$,
po dosazení obdržíme diferenciální rovnici volného kmitání

$$\varphi'' + \frac{G \cdot x}{I_0} \varphi = 0$$

Moment setrvačnosti tenké tyče k ose procházející těžištěm je

$$I_T = \frac{ml^2}{12}$$



Obr. 79

k ose o určíme Steinerovou větou

$$I_o = I_T + m x^2 = m \left(\frac{l^2}{12} + x^2 \right)$$

Doba kmitu tyče je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{G x}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g x} \left(\frac{l^2}{12} + x^2 \right)}$$

Minimum doby kmitu určíme její derivací podle proměnné x , tato derivace je rovna nule

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{l^2}{12x} + x \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \frac{1 - \frac{l^2}{12x^2}}{\sqrt{x + \frac{l^2}{12x}}}$$

pro $\frac{dT}{dx} = 0$, bude

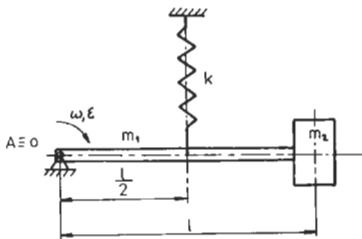
$$1 - \frac{l^2}{12x^2} = 0$$

Minimální doba kmitu bude, jestliže tyč zavěsíme od těžiště ve vzdálenosti

$$x = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

Příklad 80.

Určete dobu kmitu tenké homogenní tyče tíže G_1 , zavěšené otočně v bodě A, obr. 80. Tyč je uprostřed zavěšena na pružině s tuhostí k , na volném konci je upevněno závaží tíže G_2 . Předpokládejme, že tyč je v rovnováze ve vodorovné poloze a pružina je přitom nezatížena.



Řešení:

Vychýlíme-li tyč z rovnovážné polohy o malý úhel φ , vznikne v pružině síla

$$S = k \frac{l}{2} \varphi$$

Pohybová rovnice bude

$$I_o \ddot{\varepsilon} = -S \frac{l}{2}$$

dosazením

$$I_o \ddot{\varepsilon} = -k \frac{l^2}{4} \varphi$$

Obr. 80

takže diferenciální rovnice má tvar

$$\varphi'' + \frac{kl^2}{4I_0} \varphi = 0$$

$$\text{kde } I_0 = I_1 + I_2 = \frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2 = \frac{(m_1 + 3m_2)l^2}{3}$$

po dosazení

$$\varphi'' + \frac{3k}{m_1 + 3m_2} \varphi = 0$$

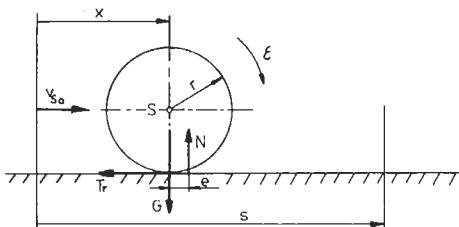
odtud doba kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + 3m_2}{3k}}$$

Příklad 81.

Válec poloměru $r = 0,3 \text{ m}$, tíže $G = 300 \text{ N}$ se valí po vodorovné podložce.

Určete jakou délku dráhy vykoná střed válce, jestliže jeho počáteční rychlost byla $v_{S_0} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a působí-li na válec při pohybu valivý odpor, který je dán ramenem valivého odporu $e = 0,01 \text{ m}$.



Obr. 81

Řešení:

Válec koná obecný rovinný pohyb. Pohybové rovnice mají tvar

$$m \cdot a_S = -T_r$$

$$0 = N - G$$

$$I_S \cdot \varepsilon = T_r \cdot r - N \cdot e$$

Pro pohyb středu platí kinematická závislost $a_S = \ell \cdot r$, kterou dosadíme do třetí rovnice. Vyjádřením T_r a dosazením do první rovnice obdržíme vlastní pohybovou rovnici

$$\left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) a_S = - \frac{G e}{r}$$

odtud

$$a_S = - \frac{G e r}{I_S + m r^2}$$

Dosazením

$$a_S = \frac{d(v_S^2)}{2dx}$$

obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{d(v_S^2)}{2dx} &= - \frac{G e r}{I_S + m r^2} \\ \int_{v_{S0}}^0 d(v_S^2) &= - \frac{2G e r}{I_S + m r^2} \int_0^s dx \\ s &= \frac{v_{S0}^2 (I_S + m r^2)}{2G e r} \end{aligned}$$

Pro $I_S = \frac{m r^2}{2}$, $G = mg$, bude

$$s = \frac{3 v_{S0}^2 r}{4 g e} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 0,3}{4 \cdot 9,81 \cdot 0,01} = 9,17 \text{ m}$$

Stejný výsledek obdržíme, jestliže při řešení použijeme větu o změně kinetické energie. Protože těleso koná obojý pohyb, bude jeho kinetická energie složena z energie příslušející rotaci a energie příslušející posuvu. Platí

$$\frac{1}{2} m v_{S0}^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 = N \cdot e \cdot \varphi$$

$$\text{kde } \omega = \frac{v_{S0}}{r} ; \quad \varphi = 2\pi \frac{s}{2\pi r} = \frac{s}{r}$$

po dosazení

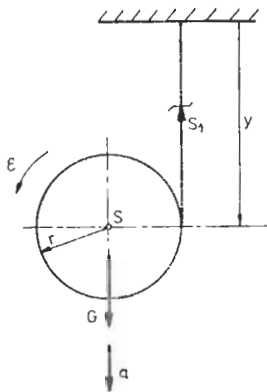
$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) v_{S0}^2 = G e \frac{s}{r}$$

odtud

$$s = \frac{v_{S0}^2 (I_S + m r^2)}{2G e r}$$

Příklad 82.

Na cívce kruhového průřezu je navinuto nehmotné vlákno. Vyšetřete pohyb cívky, která začne volně klesat, přičemž vlákno se postupně odvíjí. Dále určete sílu ve vlákně, jestliže na počátku měla cívka nulovou rychlost, obr. 82. Je dána hmotnost cívky m , poloměr r , moment setrvačnosti k ose procházející středem I_S .



Obr. 82

a dále

Síla ve vlákně

$$S_1 = G \left(1 - \frac{r^2}{I_S + mr^2} \right)$$

Příklad 83.

Tenká tyč je vedena po dokonale hladkých rovinách, z nichž jedna je svislá a druhá vodorovná, obr. 83. Napište pohybovou rovnici pro hmotný střed a vyšetřete průběh ω (φ), jestliže na počátku bylo těleso v klidu a tyč svírala s vodorovnou rovinou úhel φ_0 . Dále vyšetřete průběh reakcí v závislosti na poloze tyče.

Řešení:

Těleso vykonává obojný rovinný pohyb. Pohybové rovnice pro hmotný střed

Řešení:

Cívka koná obojný rovinný pohyb. Řešení provedeme tak, že obojný pohyb rozložíme na posuvný pohyb těžiště a rotační pohyb kolem osy procházející těžištěm.

Pohybové rovnice jsou

$$m \cdot a = G - S_1$$

$$I_S \varepsilon = S_1 \cdot r$$

Rovnice doplníme kinematickou závislostí

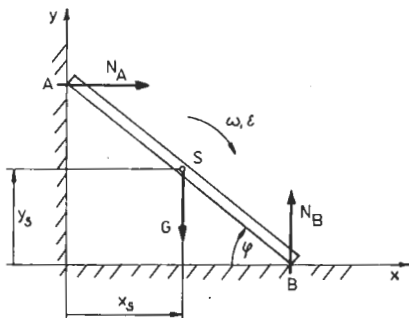
$$a = \varepsilon \cdot r$$

čímž obdržíme tři rovnice o třech neznámých. Řešení rovnic bude

$$\varepsilon = \frac{Gr}{I_S + mr^2}$$

$$a = \varepsilon \cdot r = \frac{Gr^2}{I_S + mr^2} = \text{konst.}$$

$$v_S = \frac{Gr^2}{I_S + mr^2} t ; \quad x_S = \frac{Gr^2}{2(I_S + mr^2)} t^2$$



Obr. 83

jsou

$$m \cdot a_{Sx} = N_A$$

$$m \cdot a_{Sy} = N_B - G$$

$$I_S \epsilon = N_A \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi - N_B \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi$$

Dále budeme postupovat tak, že vyjádříme odlehlosti x_S , y_S , tyto dvakrát zderivujeme podle nezávisle proměnné t a dosadíme do pohybových rovnic. Z obr. 83 platí

$$x_S = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$y_S = \frac{1}{2} \sin \varphi$$

$$v_{Sx} = x'_S = -\frac{1}{2} \omega \sin \varphi$$

$$v_{Sy} = y'_S = \frac{1}{2} \omega \cos \varphi$$

$$a_{Sx} = x''_S = -\frac{1}{2}(\epsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi); a_{Sy} = y''_S = \frac{1}{2}(\epsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi)$$

Dosazením do pohybových rovnic obdržíme

$$N_A = -\frac{m}{2} \frac{1}{2} (\epsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi)$$

$$N_B = \frac{m}{2} \frac{1}{2} (\epsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) + G$$

a dále dosazením reakcí

$$I_S \epsilon = -\frac{ml^2}{4} (\epsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi) \sin \varphi - \frac{Gl}{2} \cos \varphi - \frac{ml^2}{4} (\epsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) \cos \varphi$$

Pohybová rovnice pro hmotný střed po úpravě bude

$$(I_S + \frac{ml^2}{4}) \epsilon = -\frac{Gl}{2} \cos \varphi$$

Pro $\varphi(t)$ je to nelineární diferenciální rovnice druhého řádu, jejíž řešení je složitější. Proto k řešení použijeme závislost $\omega(\varphi)$, platí

$$\mathcal{E} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}$$

tedy

$$\begin{aligned} \left(I_S + \frac{ml^2}{4}\right) \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega &= -\frac{Gl}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi d\varphi \\ \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) \left(I_S + \frac{ml^2}{4}\right) &= -\frac{Gl}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \end{aligned}$$

Pro $\omega_0 = 0$, bude závislost $\omega(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_S + \frac{ml^2}{4}\right) &= -\frac{Gl}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \\ \omega^2 &= \frac{4Gl}{4I_S + ml^2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \end{aligned}$$

Z pohybové rovnice vyjádříme úhlové zrychlení

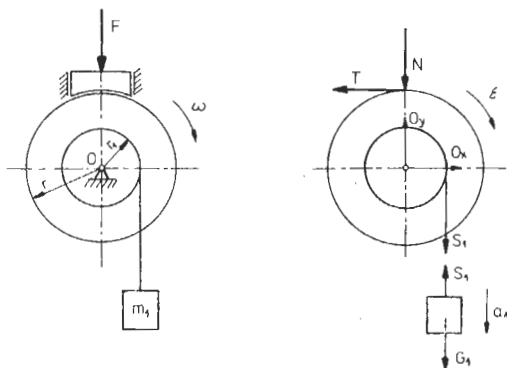
$$\mathcal{E} = -\frac{2Gl}{4I_S + ml^2} \cos \varphi$$

které s úhlovou rychlostí dosadíme do vztahů vyjadřující reakce, takže obdržíme

$$\begin{aligned} N_A &= -\frac{ml}{2} \left[-\frac{2Gl}{4I_S + ml^2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{4Gl}{4I_S + ml^2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \cos \varphi \right] = \\ &= \frac{m^2 g l^2}{4I_S + ml^2} (3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0) \cos \varphi \\ N_B &= \frac{ml}{2} \left[-\frac{2Gl}{4I_S + ml^2} \cos^2 \varphi - \frac{4Gl}{4I_S + ml^2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \sin \varphi \right] + G = \\ &= G - \frac{m^2 g l^2}{4I_S + ml^2} \left[\cos^2 \varphi + 2(\sin \varphi_0 \sin \varphi - \sin^2 \varphi) \right] \end{aligned}$$

12.2. Dynamika soustavPříklad 84.

Určete velikost přitlačné síly F špalíkové brzdy tak, aby se břemeno hmotnosti m_1 , pohybující se na počátku rychlostí v_0 zastavilo za čas t_1 , obr. 84. Součinitel smykového tření mezi kotoučem a špalíkem je f , moment setrvačnosti kotouče I_0 , poloměry r , r_1 . Čepové tření, hmotnost špalíku a lana neuvažujte.



Obr. 84

Řešení:

Jedná se o soustavu těles, řešení provedeme metodou uvolňování. Těleso zavěšené na laně koná posuvný pohyb, pohybová rovnice má tvar

$$m_1 \cdot a_1 = G_1 - S_1 \quad (1)$$

kotouč koná rotační pohyb

$$I_0 \cdot \epsilon = S_1 \cdot r_1 - T \cdot r \quad (2)$$

$$0 = O_x - T$$

$$0 = O_y - N - S_1$$

Rovnice doplníme vztahem pro smykové tření a kinematickou závislostí

$$T = N \cdot f \quad (3)$$

$$a_1 = \epsilon \cdot r_1 \quad (4)$$

kde N určíme z rovnováhy nepohybujícího se špalíku (ve směru osy y)

$$N = F$$

(5)

Řešením rovnic (1) až (5) obdržíme (složkové rovnice kotouče nebudeme používat, protože neřešíme reakce)

$$m_1 a_1 = G_1 - S_1$$

$$I_0 \frac{a_1}{r_1} = S_1 r_1 - F r f$$

odtud vyloučením S_1 bude

$$a_1 = \frac{(G_1 r_1 - F r f) r_1}{I_0 + m_1 r_1^2}$$

Za předpokladu, že na pravé straně poslední rovnice je konstanta, tedy $a_1 = \text{konst.}$, můžeme dosadit

$$a_1 = \frac{dv}{dt}$$

tedy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(G_1 r_1 - F r f) r_1}{I_0 + m_1 r_1^2} = a_1$$

a po integraci

$$-v_0 = \frac{(G_1 r_1 - F r f) r_1}{I_0 + m_1 r_1^2} t_1 \quad -v_0 = a_1 t$$

odtud

$$F = \frac{G_1 r_1^2 t_1 + v_0 (I_0 + m_1 r_1^2)}{r r_1 t_1 f}$$

Příklad 85.

Na válec pohybující se po vodorovné rovině je navinuto nehmotné vlákno vedené přes kladku, na konci vlákna je připevněno závaží, obr. 85. Je dáno: m_1, m_2, m_3, r_2, r_3 , momenty setrvačnosti k osám procházejícím středem kladky I_0 , středem válce I_3 . Počáteční rychlost závaží je nulová. Určete zrychlení závaží a_1 , pasivní odporu a prokluz válce neuvažujte.

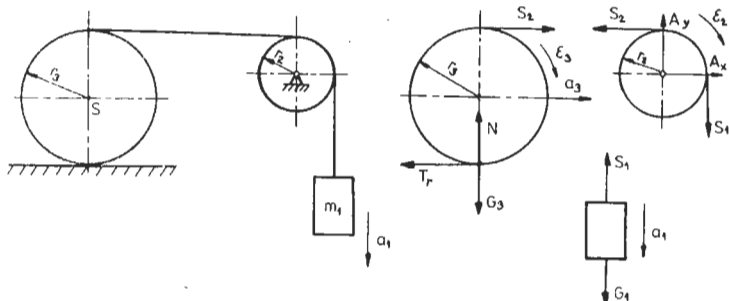
Řešení:

Tělesa uvolníme (obr. 85 vpravo) a napíšeme pohybové rovnice. Pro závaží, které koná posuvný pohyb, platí

$$m_1 a_1 = G_1 - S_1$$

(1)

Kladka koná rotační pohyb, pohybová rovnice bude



Obr. 85

$$I_0 \epsilon_2 = S_1 r_2 - S_2 r_2 \quad (2)$$

$$0 = A_x - S_2$$

$$0 = A_y - S_1$$

Protože neřešíme reakce, vynecháme pro další řešení složkové podmínky rovnováhy. Válec koná obecný rovinný pohyb, pohybové rovnice budou

$$m_3 \cdot a_3 = S_2 - T_r \quad (3)$$

$$I_S \epsilon_3 = T_r \cdot r_3 + S_2 \cdot r_3 \quad (4)$$

$$0 = N - G_3$$

Rovnice doplníme kinematickými vztahy

$$a_1 = \epsilon_2 r_2 ; \quad a_3 = \epsilon_3 r_3 ; \quad a_3 = \frac{a_1}{2}$$

Dále provedeme řešení těchto rovnic. Z rovnice (1) obdržíme

$$S_1 = G_1 - m_1 a_1$$

z rovnice (2)

$$S_2 = S_1 - \frac{I_0 \epsilon_2}{r_2} = G_1 - m_1 a_1 - \frac{I_0 \epsilon_2}{r_2}$$

Dosazením vztahu (3) do (4) bude

$$I_S \epsilon_3 = (S_2 - m_3 a_3) r_3 + S_2 r_3$$

odtud

$$S_2 = \frac{I_S \varepsilon_3 + m_3 a_3 r_3}{2r_3}$$

takže

$$G_1 - m_1 a_1 - \frac{I_0 \varepsilon_2}{r_2} = \frac{I_S \varepsilon_3 + m_3 a_3 r_3}{2r_3}$$

Po dosazení kinematických závislostí

$$G_1 - m_1 a_1 - \frac{I_0 \frac{a_1}{r_2}}{r_2} = \frac{I_S \frac{a_1}{2r_3} + m_3 \frac{a_1}{2} r_3}{2r_3}$$

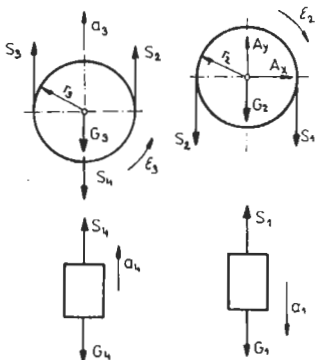
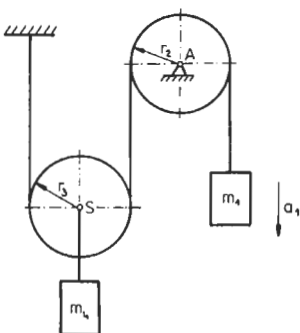
a po úpravě bude zrychlení závaží

$$a_1 = \frac{G_1}{m_1 + \frac{I_0}{r_2^2} + \frac{I_S}{4r_3^2} + \frac{m_3}{4}}$$

Příklad 86.

Určete zrychlení tělesa o hmotnosti m_1 zavěšeného na nehmotném vlákně kladkostroje, jestliže je dáno: $m_1, m_2, m_3, m_4, I_{3S}, L_2, r_2, r_3$; obr. 86. Předpokládejme, že hmotnost tělesa 1 je dostatečně velká, aby se toto těleso pohybovalo dolů.

Pasivní odpory neuvažujte.



Řešení:

provedeme metodou uvolňování, jednotlivá tělesa uvolníme (obr. 86) a napíšeme pohybové rovnice.

Těleso 1 koná posuvný pohyb, pohybová rovnice bude

$$m_1 \cdot a_1 = G_1 - S_1 \quad (1)$$

těleso 2 koná rotační pohyb kolem osy procházející bodem A

$$I_2 \varepsilon_2 = S_1 \cdot r_2 - S_2 \cdot r_2 \quad (2)$$

$$0 = A_x$$

$$0 = A_y - G_2 - S_2 - S_1$$

těleso 3 koná obecný pohyb, pohybové rovnice jsou

$$m_3 \cdot a_3 = S_2 + S_3 - G_3 - S_4 \quad (3)$$

$$I_{3S} \varepsilon_3 = S_2 \cdot r_3 - S_3 \cdot r_3 \quad (4)$$

těleso 4 vykonává posuvný pohyb

$$m_4 \cdot a_4 = S_4 - G_4 \quad (5)$$

Pohybové rovnice doplníme kinematickými vztahy

$$a_1 = \varepsilon_2 r_2 ; \quad a_3 = \varepsilon_3 r_3 ; \quad a_4 = \frac{a_1}{2} ; \quad a_3 = a_4$$

Nyní provedeme řešení rovnic. Z rovnice (5) vyjádříme

$$S_4 = m_4 a_4 + G_4$$

dosadíme do (3), takže

$$m_3 a_3 = S_2 + S_3 - G_3 - m_4 a_4 - G_4$$

odtud

$$S_3 = m_3 a_3 - S_2 + G_3 + m_4 a_4 + G_4$$

dosazením do vztahu (4) bude

$$I_{3S} \varepsilon_3 = S_2 r_3 - (m_3 a_3 - S_2 + G_3 + m_4 a_4 + G_4) r_3$$

odtud

$$S_2 = \frac{I_{3S} \varepsilon_3}{2r_3} + \frac{m_3 a_3}{2} + \frac{G_3}{2} + \frac{m_4 a_4}{2} + \frac{G_4}{2}$$

Ze vztahu (1) vyjádříme S_1 a současně S_2 dosadíme do vztahu (2)

$$I_2 \ddot{\epsilon}_2 = G_1 r_2 - m_1 a_1 r_2 - \frac{I_3 \ddot{\epsilon}_3 r_2}{2r_3} - \frac{m_3 a_3 r_2}{2} - \frac{G_3 r_2}{2} - \frac{m_4 a_4 r_2}{2} - \frac{G_4 r_2}{2}$$

dále dosadíme kinematické vztahy a úpravou obdržíme zrychlení

$$a_1 = \frac{2G_1 - G_3 - G_4}{2m_1 + \frac{2I_2}{r_2^2} + \frac{I_3}{2r_3^2} + \frac{m_2 + m_3}{2}}$$