

# **DYNAMIKA**

Přednášky

Ing. Lubomír Houfek, Ph.D.

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně

Brno, 2011

Podklady ještě neprošly finální korekturou, mohou se v ní proto vyskytovat chyby.  
Pro kontrolu viz skriptu Mechanika těles - Dynamika, Prof. Kratochvíl, Prof. Slavík.

# Obsah

<b>1</b>	<b>DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU</b>	<b>1</b>
1.1	Hybnost hmotného bodu . . . . .	1
1.2	Pohybová rovnice . . . . .	1
1.3	1. impulsová věta . . . . .	2
1.4	Práce, Výkon . . . . .	3
1.5	d'Alembertův princip . . . . .	3
1.6	Zákon zachování energie . . . . .	4
1.6.1	Kinetická energie . . . . .	4
1.6.2	Potenciální silové pole, potenciální energie . . . . .	5
1.6.3	Zákon zachování energie . . . . .	6
1.7	Zákon o změně hybnosti . . . . .	9
1.8	Moment hybnosti . . . . .	9
1.9	Pohybová rovnice pro rotační pohyb . . . . .	9
1.10	2. impulsová věta . . . . .	10
1.11	Zákon o změně momentu hybnosti . . . . .	10
1.12	Vázaný pohyb hmotného bodu . . . . .	10
1.13	Složený pohyb, dynamika složeného pohybu . . . . .	12
1.14	Řešení dynamiky hmotného bodu v přirozených souřadnicích . . . . .	13
<b>2</b>	<b>DYNAMIKA SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ</b>	<b>16</b>
2.1	Analýza pohybu jednotlivých těles . . . . .	16
2.2	Analýza pohybu jako celku . . . . .	17
<b>3</b>	<b>MOMENTY SETRVAČNOSTI</b>	<b>20</b>
3.1	Momenty setrvačnosti . . . . .	21
3.2	Tenzor setrvačnosti . . . . .	21
3.3	Souřadnicové systémy . . . . .	22
3.4	Steinerova věta . . . . .	22
<b>4</b>	<b>DYNAMIKA TRANSLAČNÍHO POHYBU TĚLESA</b>	<b>24</b>
4.1	Hybnost . . . . .	24
4.2	Moment hybnosti . . . . .	24
4.3	Pohybová rovnice . . . . .	25
4.4	Kinetická energie . . . . .	25
<b>5</b>	<b>ROTAČNÍ POHYB TĚLESA</b>	<b>25</b>
5.1	Hybnost a moment hybnosti . . . . .	25
5.2	Pohybové rovnice . . . . .	27
5.3	Kinetická energie . . . . .	27
5.4	Detailní rozbor rotačního pohybu . . . . .	27
5.5	Vyvažování tuhých těles . . . . .	31
5.5.1	Eliminace silových účinků - statické vyvažování . . . . .	31
5.5.2	Eliminace momentových účinků - dynamické vyvažování . . . . .	34

<b>6</b>	<b>OBEČNÝ ROVINNÝ POHYB</b>	<b>35</b>
6.1	Hybnost a moment hybnosti . . . . .	35
6.2	Pohybové rovnice . . . . .	37
6.2.1	Pro obecný referenční bod . . . . .	37
6.2.2	Pro referenční bod těžiště . . . . .	37
6.3	Kinetická energie obecného rovinného pohybu . . . . .	38
6.4	Analýza chování válečku . . . . .	38
<b>7</b>	<b>SFÉRICKÝ POHYB</b>	<b>40</b>
7.1	Hybnost a moment hybnosti . . . . .	42
7.2	Pohybové rovnice . . . . .	45
7.3	Kinetická energie . . . . .	46
7.4	Technicky využitelné případy sférického pohybu . . . . .	46
7.4.1	Regulární precese . . . . .	46
7.4.2	Těžký setrvačnick . . . . .	46
7.4.3	Lehký setrvačnick . . . . .	47
<b>8</b>	<b>DYNAMIKA SOUSTAV TĚLES</b>	<b>48</b>
8.1	Metoda uvolňovací . . . . .	48
8.2	Metoda redukce . . . . .	50
8.3	Metoda obecné rovnice dynamiky . . . . .	51
8.4	Lagrangeovy rovnice 2. druhu . . . . .	52
<b>9</b>	<b>ÚVOD DO ANALYTICKÉ MECHANIKY</b>	<b>52</b>
9.1	Druhy vazeb . . . . .	52
9.2	Druhy posunutí . . . . .	53
9.3	Zobecněné souřadnice . . . . .	54
9.4	Zobecněné síly . . . . .	54
9.5	Princip virtuálních prací . . . . .	55
9.6	Lagrangeovy rovnice 2. druhu . . . . .	56
<b>10</b>	<b>LINEÁRNÍ KMITÁNÍ S 1° VOLNOSTI</b>	<b>58</b>
10.1	Pohybová rovnice . . . . .	59
10.2	Homogenní řešení . . . . .	60
10.2.1	Volné netlumené kmitání . . . . .	60
10.2.2	Volné tlumené kmitání . . . . .	63
10.3	Partikulární řešení . . . . .	67
10.4	Vzorový příklad . . . . .	72
<b>11</b>	<b>KMITÁNÍ S VÍCE STUPNI VOLNOSTI</b>	<b>75</b>
11.1	Volné netlumené kmitání . . . . .	76
11.2	Vybuzené kmitání . . . . .	78
<b>12</b>	<b>ÚVOD DO NELINEÁRNÍHO KMITÁNÍ</b>	<b>79</b>
12.1	Přibližné metody řešení nelineárních pohybových rovnic . . . . .	81
12.1.1	Rozvoj do Taylorovy řady . . . . .	81
12.1.2	Metoda přímé linearizace . . . . .	81
12.1.3	Metoda ekvivalentní linearizace . . . . .	82
12.2	Přechodové charakteristiky . . . . .	83

<b>13 RÁZ TĚLES</b>	<b>85</b>
13.1 Přímý centrální ráz . . . . .	85
13.2 Nepřímý ráz . . . . .	88
13.3 Střed rázu . . . . .	88
<b>14 EXPERIMENT</b>	<b>89</b>
14.1 Měřicí řetězec . . . . .	89
14.2 Snímače . . . . .	90
14.2.1 Typy snímačů . . . . .	90

# 1 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

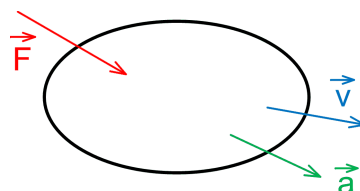
**Hmotný bod:** (Bodové těleso) - jedná se o model reálného objektu, u kterého předpokládáme soustředění hmoty tělesa a všech působících sil do jednoho bodu. Neuvažujeme tedy prostorové uspořádání reálného objektu.

Hmotný bod má z hlediska pohybového stavu 3 stupně volnosti - translace ve všech souřadnicových směrech (translace ve třech na sobě kolmých směrech). Neuvažuje se rotace okolo sebe sama, hmotný bod může rotovat okolo jiného bodu.

## 1.1 Hybnost hmotného bodu

Pohybový stav hmotného bodu je dán fyzikální veličinou hybnost, definovanou dle vztahu

$$\vec{H} = m\vec{v}$$
$$\mathbf{H}_1 = m\mathbf{v}_1$$



## 1.2 Pohybová rovnice

Dle 2. Newtonova zákona platí

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{H}_1}{dt}$$

Pohybuje-li se hmotný bod „normální“ rychlostí, tj. nedosahuje-li ani třetiny rychlosti světla ve vakuu (což většina technických objektů splňuje), tak platí

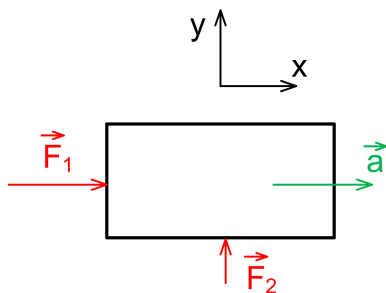
$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1$$

Pozn.: Uvedený zápis je soustavou tří rovnic, protože každý vektor lze rozložit do tří složek na sebe kolmých, takže dostaneme:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ F_z &= ma_z \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_1 = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Příklad:



Pohybové rovnice:

$$x : F_1 = ma$$

$$y : F_2 = 0$$

V reálných aplikacích lze dosáhnout vhodnou volbou souřadného systému snížení počtu pohybových rovnic na 2 nebo dokonce na jednu.

### 1.3 1. impulsová věta

Vyjdeme z 2. Newtonova zákona:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} \longrightarrow \vec{F} dt = d\vec{H}$$

integrujeme od 1. časového okamžiku do 2.

Hybnost je veličina energetická, zajímají nás jen rozdíly stavů a ne jak se měnil její průběh.

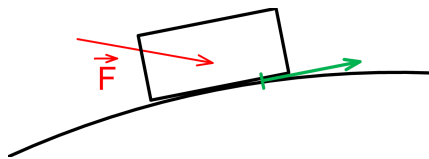
$$\int_1^2 \vec{F} dt = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$$

1. impulsovou větu lze definovat takto:

Časová změna síly (impuls) způsobí změnu hybnosti tělesa (buď hmotnost nebo rychlost)

$$\int_1^2 \vec{F} dt = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \qquad \int_1^2 \mathbf{F}_1 dt = \mathbf{H}_{12} - \mathbf{H}_{11}$$

## 1.4 Práce, Výkon



Pohybuje-li se těleso po nějaké dráze  $d\vec{r}$  za působení nějaké síly  $\vec{F}$ , pak vykoná mechanickou práci

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \qquad dA = \mathbf{F}_1^T d\mathbf{r}_1$$

časová změna práce je výkon  $P = \frac{dA}{dt}$

$$P = \frac{d\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \dots = d\vec{F} \vec{v} \quad \Rightarrow \quad dP = \vec{F} d\vec{v} \qquad dP = \mathbf{F}^T d\mathbf{v}$$

## 1.5 d'Alembertův princip

Je založen na statických předpokladech. Zavádí novou sílu do silového zatížení - d'Alembertovu nebo také setrvačnou sílu.

d'Alembertův princip lze formulovat: Součet všech sil působících na těleso se rovná síle setrvačné

$$\sum \vec{F} = \vec{F}^s \qquad \sum \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^s$$

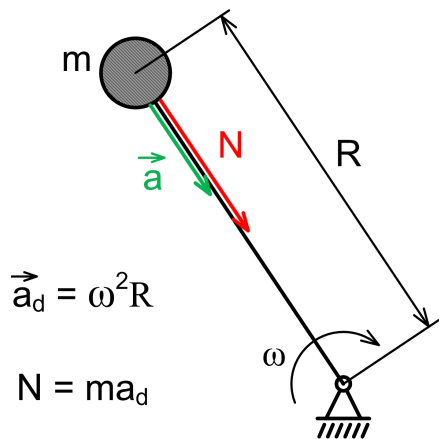
Rozdíl oproti Newtonovu pojetí

Newtonova metodika pracuje s reálnými silami a řeší kinematiku pohybu, d'Alembertův princip zavádí fiktivní setrvačnou sílu. Tato síla působí proti předpokládanému pohybu a je možné ji definovat

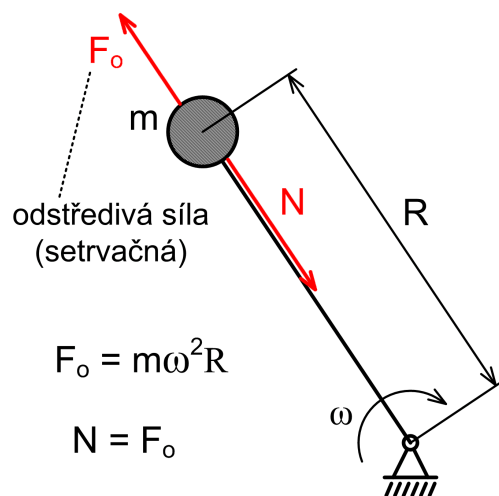
$$\vec{F}^s = -m\vec{a} \qquad \mathbf{F}_1 = -m\mathbf{a}_1$$

Příklad:

Newtonův popis



d'Alembertův popis



## 1.6 Zákon zachování energie

### 1.6.1 Kinetická energie

Vyjdeme-li z Newtonova 2. pohybového zákona, můžeme obě strany vynásobit elementem dráhy  $d\vec{r}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_k$$

$$dA = dE_k \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 \dots\dots \text{kinetická energie}$$

$$\text{Platí: } \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow A = E_{k_1} - E_{k_0}$$

Změna kinetické energie je rovna práci působících sil.



### 1.6.2 Potenciální silové pole, potenciální energie

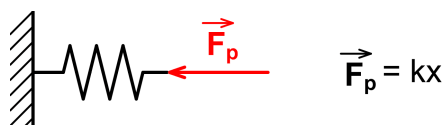
Jestliže síla  $\vec{F}$ , která působí na těleso, je v nějakém prostoru funkcí polohy, pak je tento prostor nazýván silové pole.

Toto silové pole je potenciální, jestliže platí následující předpoklady:

- a) Síly, které v tomto poli působí, mají potenciál  
→ jsou funkcí pouze polohy

Př.: 1. Zemské tíhové pole:  $\vec{F}_G = m\vec{g}$

2. Síla v pružině



- b) Práce, kterou vykonávají síly, závisí na počátečním a koncovém stavu a nezávisí na průběhu, jak se z počátečního stavu dostane do stavu koncového. Z tohoto předpokladu vyplývá, že síly musí být konzervativní, tj. soustava bez pasivních odporů.

Pak práce vykonaná těmito silami po uzavřené křivce je nulová.

$$\oint \vec{F} \, d\vec{r} = 0$$

Za těchto předpokladů můžeme práci po nějaké křivce vyjádřit vztahem

$$A = \int_1^2 dU(x, y, z)$$

kde  $U(x, y, z)$  je potenciální silová funkce. Platí pro ni:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Z tohoto zápisu lze odvodit

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

Místo silové potenciální funkce lze zavést její zápornou hodnotu - potenciální energii

$$U(x, y, z) = -E_p$$

Potenciální energie je skalární funkce, která závisí na poloze. Lze pro ni psát

$$dA = -dE_p$$

Platí

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{p_0} - E_{p_1}$$

Rozdíl potenciální energie mezi polohou 0 a 1 je roven práci potřebné k přemístění tělesa z 0 do 1.

### 1.6.3 Zákon zachování energie

Porovnáním dvou předchozích výsledků lze psát

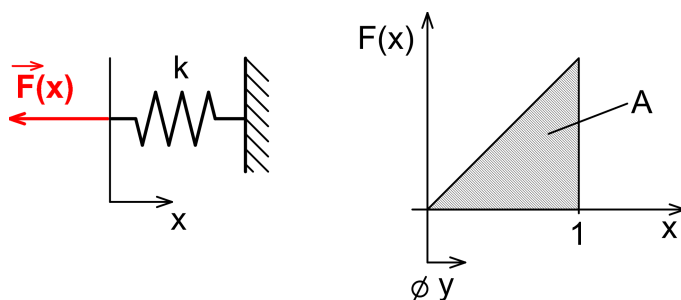
$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = E_{k_1} - E_{k_0} = E_{p_0} - E_{p_1}$$

a odtud pak platí

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_0} + E_{p_0} = \text{konst.}$$

konají-li při pohybu tělesa práci pouze konzervativní síly, je součet kinetické a potenciální energie konstantní

Příklad: Potenciální energie pružiny



$$F = kx$$

$$dA = -dE_p$$

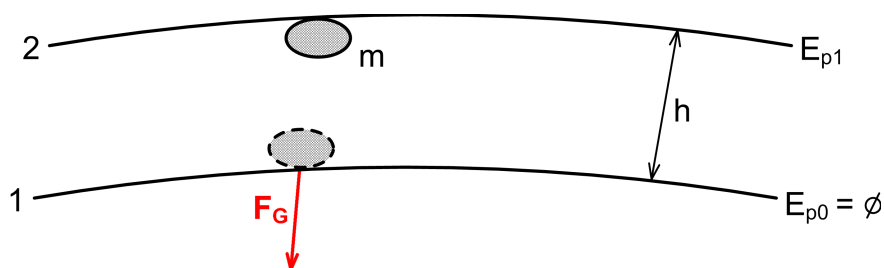
$$E_{p_0} = 0$$

$$\int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} = E_{p_0} - E_{p_1}$$

$$\int_0^x kx \, dx = -E_p \quad \longrightarrow \quad -k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^x = -E_p$$

$$\underline{E_p = \frac{1}{2} k x^2}$$

Potenciální energie tíhového pole



$$F_G = mg \quad \int_1^2 -F_G \, dx = -E_{p1} \quad -mg[x]_0^h = -E_p$$

$$\underline{mgh = E_p}$$

Pozn: Maticový zápis energií se provádí v tzv. kvadratické formě proměnných ve tvaru:

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T / \mathbf{A} \mathbf{a}$$

symbolicky

$$\boxed{\phantom{000}} \boxed{\phantom{000000}} \boxed{\phantom{00}} = \bullet$$

Např. kinetická energie  $E_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T / \mathbf{M} \mathbf{v}$

Potenciální energie pružiny  $E_k = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T / \mathbf{k} \mathbf{x}$

## 1.7 Zákon o změně hybnosti

Opět vyjdeme z 2. Newtonova zákona  $m\vec{a} = \vec{F}$  a rozepíšeme  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m d\vec{v} = \vec{F} dt$$

Zintegrujeme

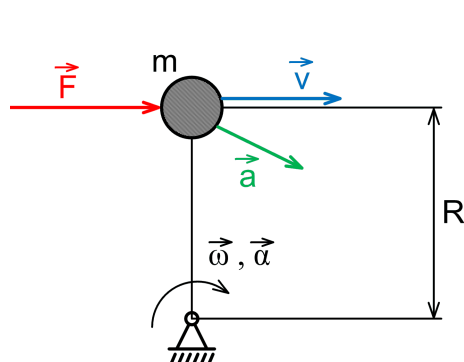
$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \int_1^2 \vec{F} dt$$

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \int_1^2 \vec{F} dt \quad \mathbf{H}_{12} - \mathbf{H}_{11} = \int_1^2 \mathbf{F}_1 dt$$

Změna hybnosti je dána integrálem časového průběhu působící síly.  
Je-li součet sil působících na hmotný bod nulový, hybnost se nemění.

## 1.8 Moment hybnosti

Koná-li hmotný bod rotační pohyb kolem pevného bodu, platí:



$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{R} \\ \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{M}_o &= \vec{R} \times \vec{F} \\ \vec{H} &= m\vec{v} \end{aligned}$$

Potom moment hybnosti je definován

$$\vec{b}_o = \vec{R} \times \vec{H} \quad \mathbf{b}_{o1} = \mathbf{r}_1 \mathbf{H}_1$$

Moment hybnosti popisuje pohybový stav tělesa, které vykonává rotační pohyb.

## 1.9 Pohybová rovnice pro rotační pohyb

Analogicky k 2. Newtonovu zákonu lze psát:  $\vec{M} = \frac{d\vec{b}_o}{dt}$

## 1.10 2. impulsová věta

Vyjdeme z pohybové rovnice pro rotační pohyb

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} \Rightarrow \vec{M}_o dt = d\vec{b}_o$$

zintegrujeme

$$\int_1^2 \vec{M} dt = \vec{b}_{o_2} - \vec{b}_{o_1} \qquad \int_1^2 \mathbf{M}_1 dt = \mathbf{b}_{o_{21}} - \mathbf{b}_{o_{11}}$$

Platí: Časová změna momentu způsobí změnu momentu hybnosti.

## 1.11 Zákon o změně momentu hybnosti

Vyjdeme ze vztahu  $\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt}$  a převedeme do tvaru  $\vec{M}_o dt = d\vec{b}_o$

a zintegrujeme

$$\int_1^2 \vec{M} dt = \vec{b}_{o_2} - \vec{b}_{o_1} \qquad \int_1^2 \mathbf{M}_1 dt = \mathbf{b}_{o_{21}} - \mathbf{b}_{o_{11}}$$

Změna momentu hybnosti je dána integrálem časového průběhu působícího momentu.

Je-li součet momentů k nějakému bodu nebo ose nulový, moment hybnosti se nezmění.

## 1.12 Vázaný pohyb hmotného bodu

a) Newtonův princip

Každá z vazeb odebírá stupně volnosti volnému tělesu. každou z vazeb můžeme uvolnit a nahradit vazebnými silami. Dostaneme:

$$\vec{F} + \vec{F}_{vaz} = m\vec{a} \qquad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{vaz_1} = m\mathbf{a}_1$$

b) Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Tento přístup k řešení vázaného pohybu vychází z analytické mechaniky (spíše orientované na energetický přístup).

Lagrangeova rovnice 1. druhu je definována

$$\vec{F} + \lambda \text{grad } f = m\vec{a}$$

kde  $\lambda$  ..... Lagrangeián

$f$  ..... rovnice vazby ve tvaru  $f(x, y, z) = 0$

Lagrangeián je definován:

$$\lambda = \frac{F_N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Pozn.: Řešení pomocí Lagrangeovy rovnice 1. druhu předpokládá, že ve vazbách nedochází k disipaci energie, tj. že nedochází ke tření.

Příklad:

a) Pohyb po přímce

Přímka je popsána rovnicí:  $y = kx + q$

rovnice vazby je pak:  $f = y - kx - q = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -k \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\lambda = \frac{F_N}{\sqrt{k^2 + 1^2}}$$

b) Pohyb po kružnici

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{F_N}{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}$$

## 1.13 Složený pohyb, dynamika složeného pohybu

Složený pohyb se skládá z pohybu unášivého a pohybu relativního.  
Z kinematiky platí:

$$\vec{x}_a = \vec{x}_u + \vec{x}_r$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_u + \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_u + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

Potom pro pohybovou rovnici platí:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a = m(\vec{a}_u + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor})$$

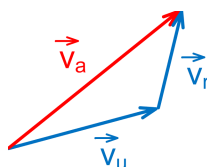
$$\mathbf{F}_1 = m(\mathbf{a}_{u_1} + \mathbf{a}_{r_1} + \mathbf{a}_{cor_1})$$

Pozn.1: Pokud by se řešil složený pohyb pomocí d'Alembertova principu, bylo by nutné zavést tři setrvačné síly

- setrvačnou sílu unášivou
- setrvačnou sílu relativní
- Coriolisovu setrvačnou sílu

Pozn.2: Kinetická energie složeného pohybu

$$E_k = \frac{1}{2}m |\vec{v}_a|^2 = \frac{1}{2}m |(\vec{v}_u + \vec{v}_r)|^2$$



tzn. je třeba přepočítat vektorově velikost absolutní rychlosti.



## 1.14 Řešení dynamiky hmotného bodu v přirozených souřadnicích

Přirozené souřadnice jsou:

- normála ...  $\vec{n}$
- tečna ...  $\vec{\tau}$
- binormála ...  $\vec{b}$

Z těchto tří jednotlivých vektorů se skládá průvodní trojhran: platí  $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{\tau}$ . Pohybové rovnice jsou pak následující

$$n : ma_n = \sum F_n$$

$$\tau : ma_\tau = \sum F_\tau$$

$$b : ma_b = \sum F_b$$

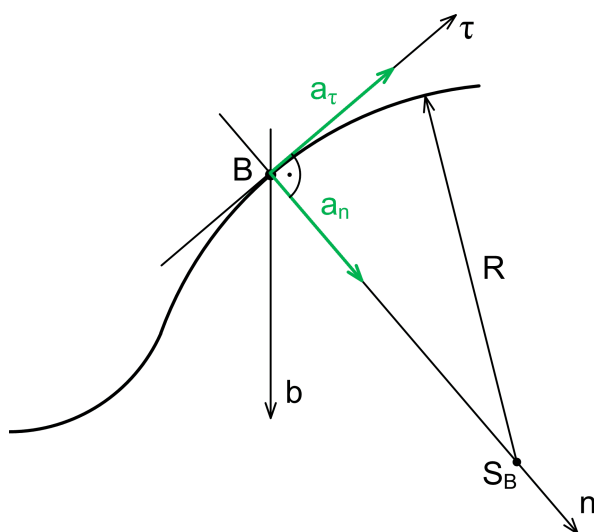
$a_n$  ... normálové zrychlení:  $a_n = \frac{v^2}{R}$  ( $R$  .. poloměr trajektorie)

$a_\tau$  ... tečné zrychlení:  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$

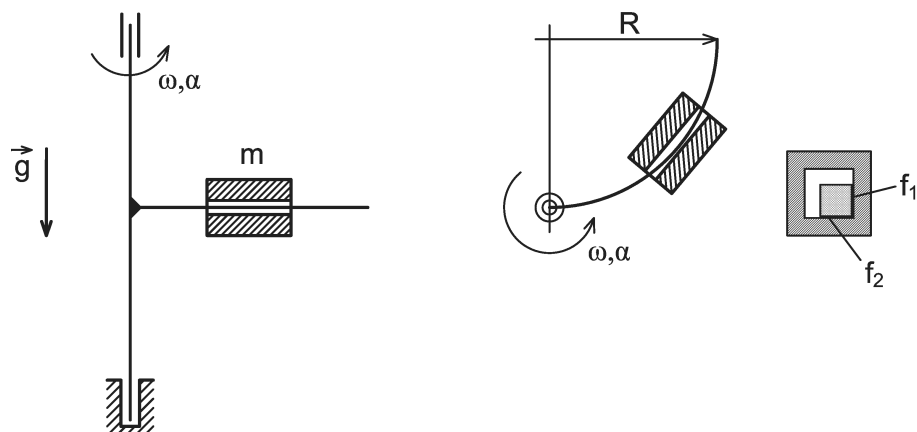
$a_b$  ... tečné zrychlení:  $a_b = 0$

Celkové zrychlení je pak

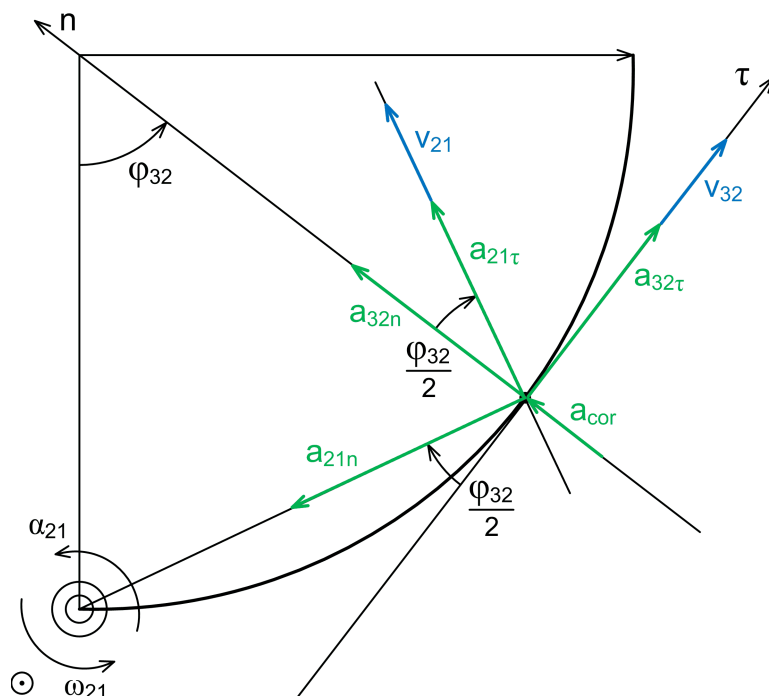
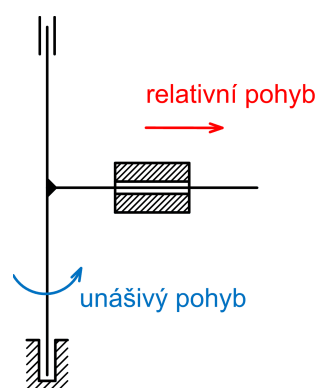
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$



Příklad:



1) Kinematický rozbor:  
těleso koná složený pohyb

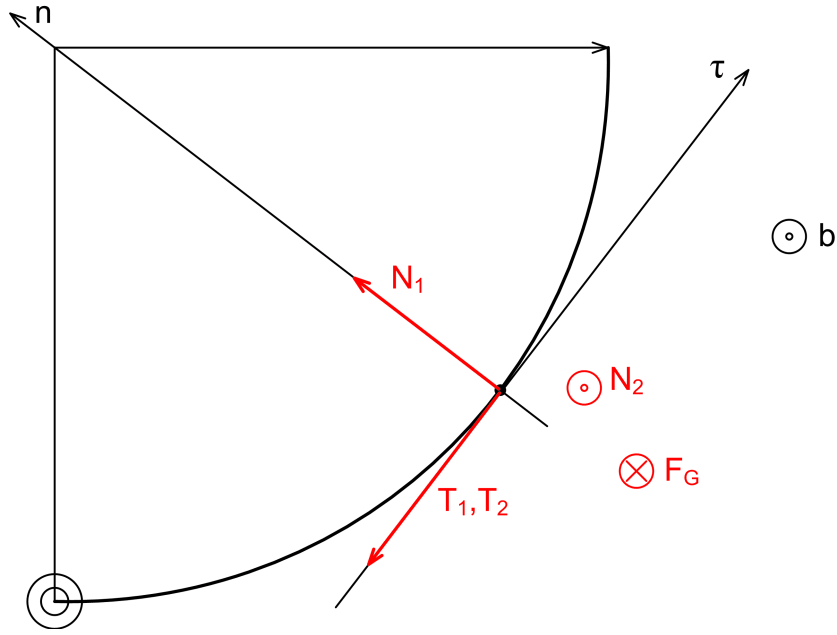


⊙ b

Platí:

$$\vec{a}_{\text{cor}} = 2(\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32})$$

## 2) Silový rozbor



$$n : N_1 = m(a_{32n} + a_{cor} + a_{21n} \sin \frac{\varphi_{32}}{2} + a_{21\tau} \cos \frac{\varphi_{32}}{2})$$

$$\tau : -T_1 - T_2 = m(-a_{21n} \cos \frac{\varphi_{32}}{2} + a_{21\tau} \sin \frac{\varphi_{32}}{2} + a_{32\tau})$$

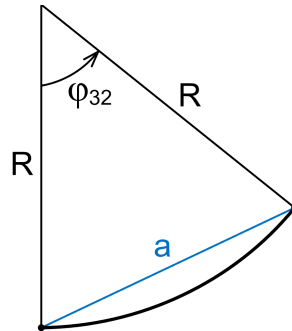
$$b : N_2 - F_G = 0$$

$$a_{cor} = 2\omega_{21}v_{32}$$

$$a_{32n} = \dot{\varphi}_{32}^2 R \quad (\dot{\omega}_{32} R) \quad \left| \quad a_{21n} = \omega_{21}^2 a \quad \right| \quad T_1 = f_1 N_1$$

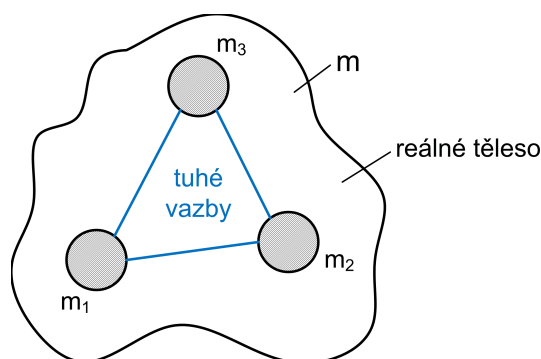
$$a_{32\tau} = \ddot{\varphi}_{32} R \quad (\alpha_{32} R) \quad \left| \quad a_{21\tau} = \alpha_{21} a \quad \right| \quad T_2 = f_2 N_2$$

$$a^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos \varphi_{32}$$



## 2 DYNAMIKA SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ

Model hmotného bodu není až na malé výjimky použitelný obecně pro řešení úloh dynamiky pro reálné soustavy. Daleko lepším přístupem k řešení se jeví použití více bodů. Reálnou součást pak modelujeme jako soustavu hmotných bodů spojených navzájem tuhými vazbami. Provádíme tzv. diskretizaci, kdy hmotnost daného tělesa vhodně soustředíme do několika hmotných bodů tak, aby zůstaly zachovány vlastnosti původního tělesa (těžiště,..)

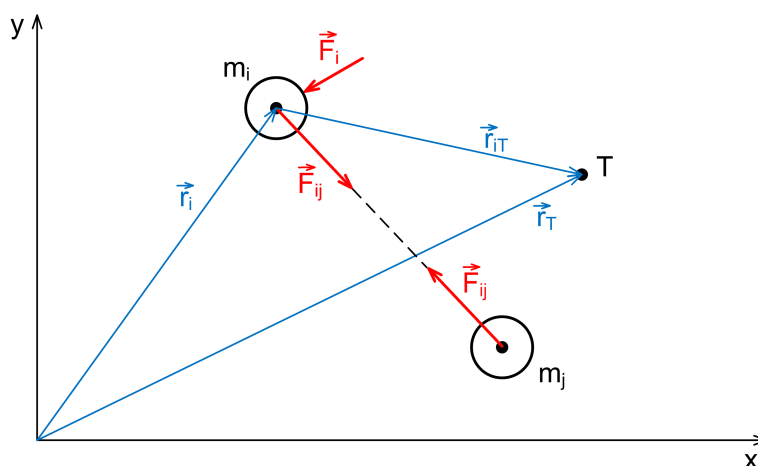


Existují dva přístupy k řešení dynamiky soustav hmotných bodů

1. Analýza pohybu samostatných těles (uvolnění)
2. Analýza pohybu jako celku

### 2.1 Analýza pohybu jednotlivých těles

Tento přístup spočívá v uvolnění jednotlivých hmotných bodů, zavedení vazebních sil a sepsání pro každý takto uvolněný hmotný bod pohybovou rovnicí. Dostáváme soustavu  $n$  rovnic. Tuto soustavu musíme doplnit doplňkovými rovnicemi, kinematickými vazbami a vazebními podmínkami. Celou tuto soustavu dále řešíme.



Pohybová rovnice i-tého tělesa:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n-1} \vec{F}_{ij} = m\vec{a}_i \qquad \mathbf{F}_{i_1} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{F}_{ij_1} = m\mathbf{a}_{i_1}$$

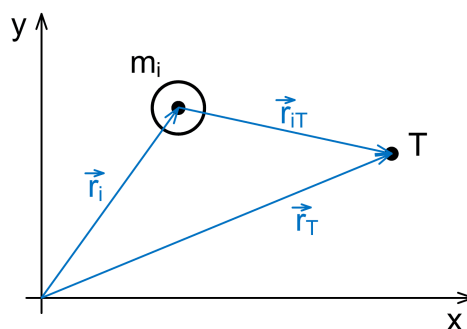
Nevýhoda tohoto přístupu:

Soustava rovnic může být velmi rozsáhlá a její řešení může být značně komplikované.

Výhoda:

Získáme komplexní řešení, tj. všechny kinematické i silové parametry soustavy hmotných bodů.

## 2.2 Analýza pohybu jako celku



Z geometrie platí:

$$\vec{r}_T = \vec{r}_i + \vec{r}_{iT} \qquad \vec{v}_T = \vec{v}_i + \vec{v}_{iT} \qquad \vec{a}_T = \vec{a}_i + \vec{a}_{iT}$$

Pro těžiště platí: 
$$\vec{r}_T = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Z toho derivací dostaneme

$$\vec{r}_T \sum m_i = \sum m_i \vec{r}_i \qquad \vec{v}_T \sum m_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_T \sum m_i = \sum m_i \vec{a}_i$$

### a) Hybnost a moment hybnosti

Hybnost a moment hybnosti určují pohybový stav soustavy hmotných bodů.

Hybnost:  $\vec{H} = \sum m_i \vec{v}_i$

dosazením  $\vec{H} = \sum m_i \vec{v}_T$  a za předpokladu  $\sum m_i = m$  dostaneme

$$\vec{H} = m \vec{v}_T \quad \mathbf{H}_1 = m \mathbf{v}_{T_1}$$

### Moment hybnosti:

$$\vec{b}_o = \sum \vec{b}_{o_i} = \sum \vec{r}_i \times \sum m_i \vec{v}_i$$

Platí

$$\vec{r}_i = \vec{r}_T - \vec{r}_{iT} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_T - \vec{v}_{iT}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{b}_o &= \sum [(\vec{r}_T - \vec{r}_{iT}) \times m_i (\vec{v}_T - \vec{v}_{iT})] = \\ &= \sum \left[ \vec{r}_T \times m_i \vec{v}_T - \underbrace{\vec{r}_T \times m_i \vec{v}_{iT}}_{=0} - \underbrace{\vec{r}_{iT} \times m_i \vec{v}_T}_{=0} + \vec{r}_{iT} \times m_i \vec{v}_{iT} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{b}_o = \sum \vec{r}_T \times m_i \vec{v}_T + \vec{r}_{iT} \times m_i \vec{v}_{iT}$$

$$\vec{b}_o = \vec{r}_T \times m \vec{v}_T + \sum \vec{r}_{iT} \times m_i \vec{v}_{iT}$$

$$\mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{r}_{T_1} m \mathbf{v}_{T_1} + \sum \mathbf{r}_{iT_1} m_i \mathbf{v}_{iT_1}$$

### b) Pohybové rovnice

Pohybové rovnice dostaneme jako totální diferenciál podle času hybnosti, resp. momentu hybnosti

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt}$$

dostaneme

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{m d\vec{v}_T}{dt} = m\vec{a}_T$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_T \quad \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_{T_1}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r}_T \times m\vec{v}_T + \sum \vec{r}_{iT} \times m_i\vec{v}_{iT})}{dt}$$

$$\vec{M}_o = \underbrace{\vec{v}_T \times m\vec{v}_T}_{=0} + \vec{r}_T \times m\vec{a}_T + \underbrace{\sum \vec{v}_{iT} \times m_i\vec{v}_{iT}}_{=0} + \sum \vec{r}_{iT} \times m_i\vec{a}_{iT}$$

Potom

$$\vec{M}_o = \vec{r}_T \times m\vec{a}_T + \sum \vec{r}_{iT} \times m_i\vec{a}_{iT}$$

$$\mathbf{M}_{o_1} = \mathbf{r}_{T_1} m \mathbf{a}_{T_1} + \sum \mathbf{r}_{iT_1} m_i \mathbf{a}_{iT_1}$$

Poznámky:

1) Rovnice jsou navzájem vázané, v obou se vyskytuje  $\vec{a}_T$ . Toto není ideální z hlediska řešení. Mnohem jednodušší je řešit dvě nezávislé rovnice. Do tohoto stavu lze rovnice převést vhodnou volbou souřadného systému. Zvolíme-li počátek souřadného systému do těžiště, bude vektor  $\vec{r}_T = 0$  a momentová pohybová rovnice přejde do tvaru

$$\vec{M}_o = \sum \vec{r}_{iT} \times m_i\vec{a}_{iT}$$

2) Rovnice řeší translační i rotační pohyb (natáčení soustavy hmotných bodů)  $\rightarrow$  obecný rovinný pohyb. Je-li počátek souřadného systému v těžišti, pak silová pohybová rovnice řeší translační pohyb a momentová pohybová rovnice řeší rotační pohyb.

### c) Kinetická energie

Kinetická energie soustavy hmotných bodů je dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Dosadíme-li za  $\vec{v}_i$ , dostaneme

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_T - \vec{v}_{iT})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_T^2 - 2v_T v_{iT} + v_{iT}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum m_i v_T^2 - \underbrace{\sum 2m_i v_T v_{iT}}_{=0} + \sum m_i v_{iT}^2 \right) \end{aligned}$$

Dostáváme

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{iT}^2$$

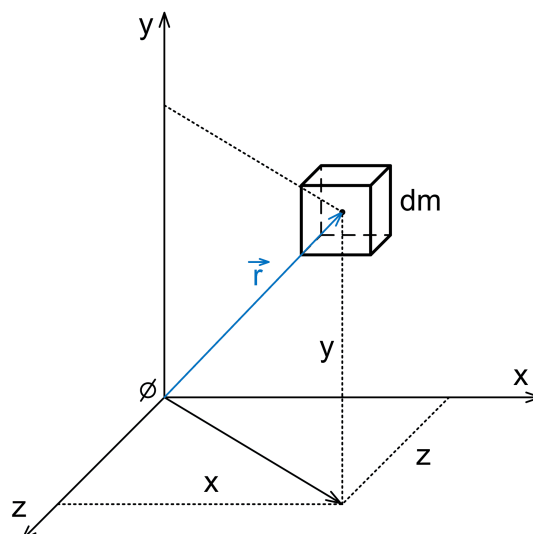
Tomuto vztahu se říká Königova věta. Výsledná kinetická energie se skládá ze dvou částí. První část má souvislost s translačním pohybem a udává rychlost těžiště, druhá část má souvislost s rotačním pohybem a jedná se o rychlosti jednotlivých hmotných bodů okolo těžiště.

### 3 MOMENTY SETRVAČNOSTI

Moment setrvačnosti udává míru setrvačných účinků při rotačním pohybu tělesa.

Lze definovat následující momenty setrvačnosti (všechny  $[\text{kgm}^2]$ ):

1. Osové
2. Rovinné
3. Polární
4. Deviační





### 3.1 Momenty setrvačnosti

#### Osové momenty setrvačnosti

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) \, dm \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) \, dm$$
$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) \, dm$$

#### Rovinné momenty setrvačnosti

$$I_{xy} = \int_m z^2 \, dm \quad I_{xz} = \int_m y^2 \, dm \quad I_{yz} = \int_m x^2 \, dm$$

#### Polární moment setrvačnosti

$$I_p = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) \, dm$$

#### Deviační momenty setrvačnosti

$$D_{xy} = \int_m xy \, dm \quad D_{xz} = \int_m xz \, dm \quad D_{yz} = \int_m yz \, dm$$

### 3.2 Tenzor setrvačnosti

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & I_y & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Vyazuje tenzorové vlastnosti. Lze jím rotovat (rotace souřadnicového systému) a tím dosahovat zvláštních stavů.

### 3.3 Souřadnicové systémy

#### Hlavní souřadnicový systém

Je to takové natočení tenzoru setrvačnosti, kdy jsou mimodiagonální prvky nulové (deviační momenty). Souřadnicový systém odpovídající tomuto natočení je hlavní souřadnicový systém. Tenzor setrvačnosti má pro hlavní souřadnicový systém tvar

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Určení hlavního souřadnicového systému:

- 1) Má-li těleso osu symetrie, pak na této ose leží jedna z os hlavního souřadnicového systému.
- 2) Má-li těleso rovinu symetrie, pak v této rovině leží dvě na sebe kolmé osy, které jsou součástí hlavního souřadnicového systému.
- 3) Má-li těleso dvě roviny symetrie, pak jejich průsečnice je osou hlavního souřadnicového systému.

#### Centrální souřadnicový systém

Je to takový souřadnicový systém, který probíhá těžištěm tělesa.

#### Hlavní centrální souřadnicový systém

Je to takový souřadnicový systém, který je hlavní, tzn. ( $D_{xy} = D_{yz} = D_{xz} = 0$ ) a probíhá těžištěm.

### 3.4 Steinerova věta

Slouží k určování momentů setrvačnosti pro souřadné systémy, které neleží v těžišti, známe-li hodnotu momentu setrvačnosti v těžišti tělesa.

Je obecně pro všechny momenty setrvačnosti možné ji definovat ve tvaru

$$I_p = I_T + m \cdot (\text{pos})^2$$

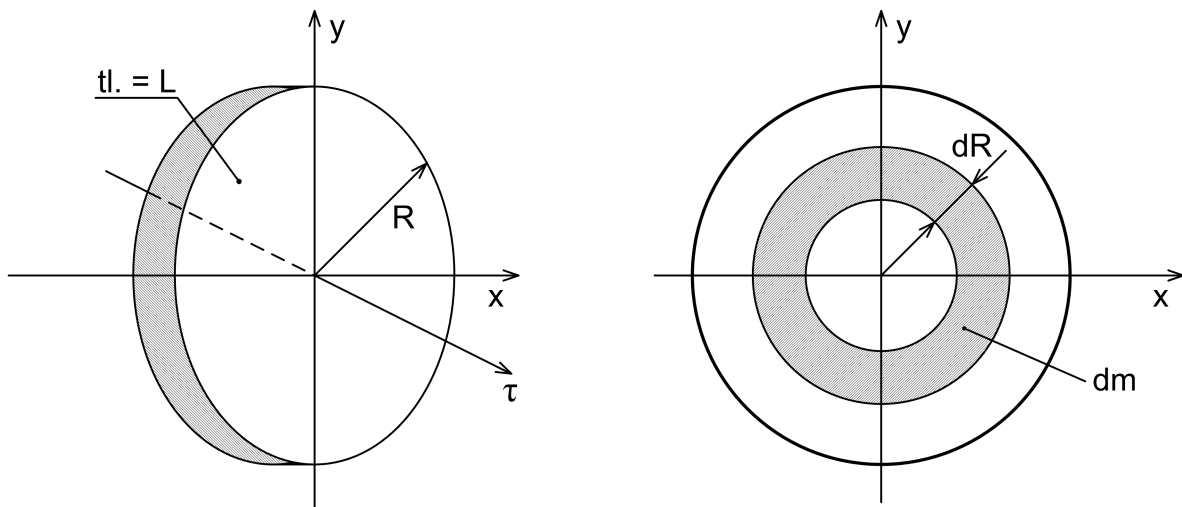
$I_p$  ..... moment setrvačnosti posunutého bodu

$I_T$  ..... moment setrvačnosti v těžišti

pos ... vzdálenost mezi těžištěm a posunutým bodem

### Příklad

Určete moment setrvačnosti tenkého disku k ose procházející těžištěm



$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \qquad dm = \rho dV = 2\pi R dR L \rho$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^R R^2 \cdot 2\pi \rho L R dR = \int_0^R 2\pi \rho L R^3 dR = \\ &= 2\pi \rho L \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4 \end{aligned}$$

Víme, že  $m = \rho V = \rho \pi R^2 L$  tudíž po dosazení vychází, že platí:

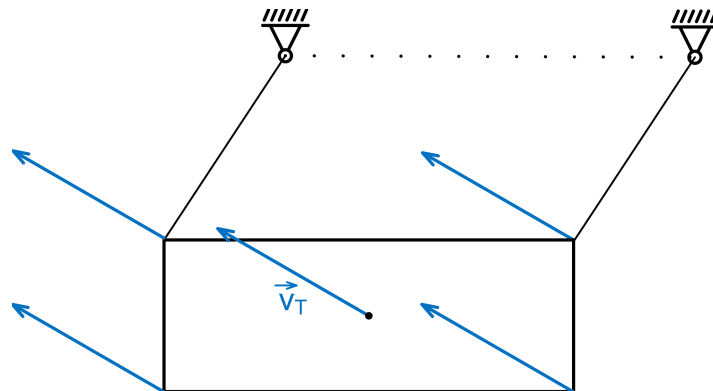
$$\underline{\underline{I_z = \frac{1}{2} m R^2}}$$

## 4 DYNAMIKA TRANSLAČNÍHO POHYBU TĚLESA

Translační pohyb tělesa je definován tak, že spojnice dvou libovolných bodů má při pohybu stále stejný směr. Platí tedy, že všechny body mají stejné dráhy, stejné rychlosti a stejná zrychlení.

Proto je pohyb tělesa při translačním pohybu určen pohybem jednoho bodu. Tímto bodem nechť je těžiště.

Dynamika translačního pohybu tělesa je tak totožná s translačním pohybem hmotného bodu.



### 4.1 Hybnost

$$\vec{H} = m\vec{v} \qquad \mathbf{H}_1 = m\mathbf{v}_1$$

### 4.2 Moment hybnosti

Moment hybnosti k těžišti je nulový, protože  $\vec{\omega} = 0$

$$\vec{b}_0 = 0 \qquad \mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{0}_1$$

Moment hybnosti k libovolnému jinému bodu je

$$\vec{b}_0 = \vec{r} \times \vec{H} \qquad \mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{h}_1$$

### 4.3 Pohybová rovnice

Je definována jako derivace hybnosti, eventuálně momentu hybnosti za čas.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} = 0$$

### 4.4 Kinetická energie

Kinetická energie je definována pro translační pohyb:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

## 5 ROTAČNÍ POHYB TĚLESA

Těleso vykonává rotační pohyb, jestliže v něm existuje přímka, pro kterou platí, že všechny její body mají nulovou rychlost. Tato přímka se jmenuje osa rotace.

### 5.1 Hybnost a moment hybnosti

Zvolíme-li počátek souřadného systému na osu rotace, je hybnost nulová

$$\vec{H} = \vec{0}$$

Moment hybnosti lze odvodit z definičního vztahu

$$\vec{b}_o = \vec{r} \times \vec{H}$$

Převédeme-li si jej do diferenční podoby, bude

$$d\vec{b}_o = \vec{r} \times d\vec{H} \quad d\vec{H} = \vec{v} dm \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

pak

$$d\vec{b}_o = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

Maticově lze tento vztah možné vyjádřit

$$d\mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{r}_1 dm$$

kde

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

pak

$$\begin{bmatrix} d\vec{b}_x \\ d\vec{b}_y \\ d\vec{b}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dm$$

$$\begin{bmatrix} d\vec{b}_x \\ d\vec{b}_y \\ d\vec{b}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix} dm = \begin{bmatrix} -\omega x z \\ -\omega y z \\ \omega(x^2 + y^2) \end{bmatrix} dm$$

$$\vec{b}_0 = \int_m \begin{bmatrix} -\omega x z \\ -\omega y z \\ \omega(x^2 + y^2) \end{bmatrix} dm = \int_m \begin{bmatrix} -\omega x z dm \\ -\omega y z dm \\ \omega(x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_m -\omega x z dm \\ \int_m -\omega y z dm \\ \int_m \omega(x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \int_m x z dm \\ -\omega \int_m y z dm \\ \omega \int_m (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega D_{xz} \\ -\omega D_{yz} \\ \omega I_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1 \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Jestliže je souřadnicový systém hlavní centrální, pak platí, že  $D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} = 0$  a pak je moment hybnosti

$$\vec{b}_o = I_o \vec{\omega}$$

## 5.2 Pohybové rovnice

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} \quad \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{I}_o \vec{\omega}}{dt} = I_o \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_o \vec{\alpha}$$

$$\vec{M} = I_o \vec{\alpha} \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_{o1} \alpha_1$$

## 5.3 Kinetická energie

Kinetická energie je pro rotační pohyb definovaná ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

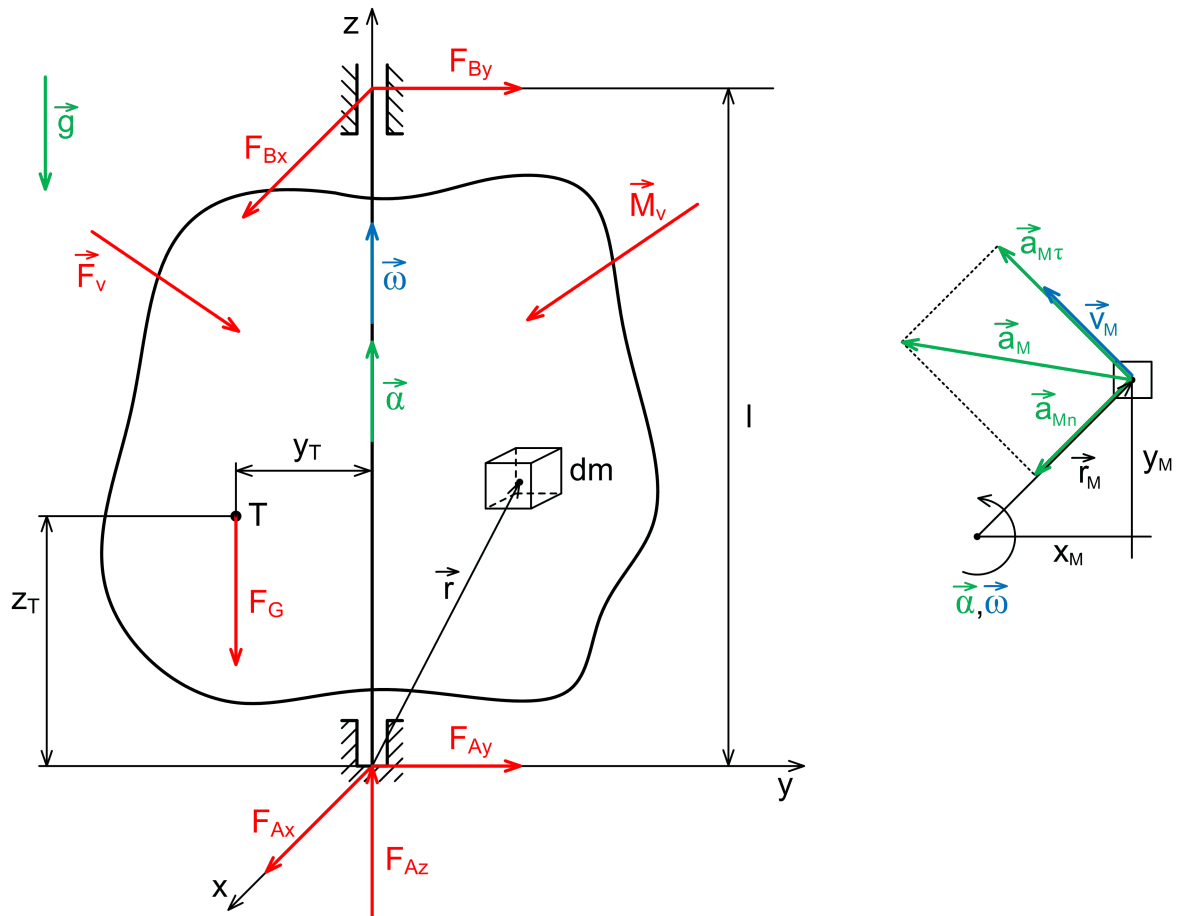
a maticově

$$E_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega}$$

## 5.4 Detailní rozbor rotačního pohybu

Rotační pohyb je jeden z technicky nejdůležitějších pohybů, který je ve velké míře používán v technických aplikacích. Je proto důležité si jej podrobněji rozebrat.

Jako model si vybereme těleso dle obrázku



Pohybové rovnice jsou následující:

$$\sum \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1 \qquad \sum \mathbf{M}_{o_1} = \mathbf{I}_1\alpha_1$$

kde

$$\mathbf{a}^M = \alpha \mathbf{r}^M + \Omega \mathbf{v}^M = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{v}^M = \Omega \mathbf{r}^M$$

$$\mathbf{r}^M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



pak

$$\mathbf{v}^M = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^M = \begin{bmatrix} -\alpha y - \omega^2 x \\ \alpha x - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Momentovou rovnici lze rozepsat na tvar

$$\vec{M} = \int_m \vec{r} \times \vec{a} \, dm$$

Pak je výhodné si vyřešit i vektorový součin  $\vec{r} \times \vec{a}$

$$\vec{r} \times \vec{a} = \mathbf{R} \mathbf{a}^M$$

kde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

pak

$$\mathbf{R} \mathbf{a}^M = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha y - \omega^2 x \\ \alpha x - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha x z + \omega^2 y z \\ -\alpha y z - \omega^2 x z \\ \alpha(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

Potom lze sepsat pohybové rovnice v následujícím tvaru:

$$F_x : F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Vx} = -\alpha \int_m y \, dm - \omega^2 \int_m x \, dm$$

$$F_y : F_{Ay} + F_{By} + F_{Vy} = \alpha \int_m x \, \mathrm{d}m - \omega^2 \int_m y \, \mathrm{d}m$$

$$F_z : F_{Az} - F_G + F_{Vz} = 0$$

$$M_x : -F_{By}L + F_G y_T + M_{Vx} = -\alpha \int_m xz \, \mathrm{d}m + \omega^2 \int_m yz \, \mathrm{d}m$$

$$M_x : F_{Bx}L + F_G x_T + M_{Vy} = -\alpha \int_m yz \, \mathrm{d}m - \omega^2 \int_m xz \, \mathrm{d}m$$

$$M_z : M_{Vz} = \alpha \int_m (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}m$$

Platí:

$$\begin{aligned} \int_m y \, \mathrm{d}m &= y_T m & \int_m xz \, \mathrm{d}m &= D_{xz} \\ \int_m x \, \mathrm{d}m &= x_T m & \int_m yz \, \mathrm{d}m &= D_{yz} \\ & & \int_m (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}m &= I_z \end{aligned}$$

Pak lze rovnice přepsat do tvaru

$$\sum F_x = (-\alpha y_T - \omega^2 x_T) m$$

$$\sum F_y = (\alpha x_T - \omega^2 y_T) m$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = -\alpha D_{xz} + \omega^2 D_{yz}$$

$$\sum M_y = \alpha D_{yz} - \omega^2 D_{xz}$$

$$\sum M_z = I_z \alpha$$

V maticové podobě

$$\sum \mathbf{F}_2 = m(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\Omega}_2^2) \mathbf{r}_2^T \qquad \sum \mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\Omega}_2 \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\omega}_2$$

kde pro jednoduchost jsou použity spolurotující souřadnice.

Pozn.: Odvození vzthau pro momentovou rovnici

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} \quad \vec{b} = \vec{r} \times \vec{H} \quad \vec{H} = m\vec{v}$$

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{v} m \Rightarrow d\vec{b} = \vec{r} \times \vec{v} dm$$

$$\vec{M} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{v} dm)}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dm$$

$$\underbrace{(\vec{v} \times \vec{v})}_{=0} + \vec{r} \times \vec{a} dm \Rightarrow \vec{M} = \int_m \vec{r} \times \vec{a} dm$$

#### Poznámka k dosaženým pohybovým rovnicím

Prvních 5 pohybových rovnic (3F + 2M) představuje silovou a momentovou rovnováhu. Jediná pohybová rovnice je poslední momentová. K výpočtu sil v ložiscích je zapotřebí prvních pět rovnic. Z nich se ukazuje, že síly v ložiscích nejsou závislé jen od vnějšího zatížení, reprezentované silovou a momentovou výslednicí, ale závisí i od úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  a od úhlového zrychlení  $\vec{\alpha}$ . To je poměrně nepříjemná situace, protože tyto mohou nabývat relativně vysokých hodnot, často přesahují i hodnoty vnějšího silového působení. Je tedy snaha eliminovat tyto silové a momentové účinky. Snižovat  $\vec{\omega}$  a  $\vec{\alpha}$  není technicky realizovatelné. Jedinou cestou, jak dosáhnout, aby tyto účinky byly nulové, je docílit stavu, kdy  $x_T = y_T = D_{xy} = D_{yz} = 0$  a nebo se tomuto budou blížit.

Uvedenému postupu se říká vyvažování tuhých těles.

## 5.5 Vyvažování tuhých těles

Cílem vyvažování tuhých těles je eliminovat přidané silové a momentové účinky. Tyto přidané účinky jsou závislé na úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  a na úhlovém zrychlení  $\vec{\alpha}$ .

### 5.5.1 Eliminace silových účinků - statické vyvažování

Při statickém vyvažování se snažíme odstranit přidané zatěžující účinky, které se nacházejí v silových pohybových rovnicích. Tyto účinky se budou blížit nule, bude-li

$$x_T \rightarrow 0 \qquad y_T \rightarrow 0$$

Snahou i cílem statického vyvažování je dosáhnout toho, aby těžiště leželo v ose rotace.

Při statickém vyvažování eliminujeme vliv tíhové síly. Tato síla má charakter volného vektoru a proto si ji můžeme vhodně posouvat na tělese. Stačí nám tedy vyvažovat v jedné vyvažované rovině.

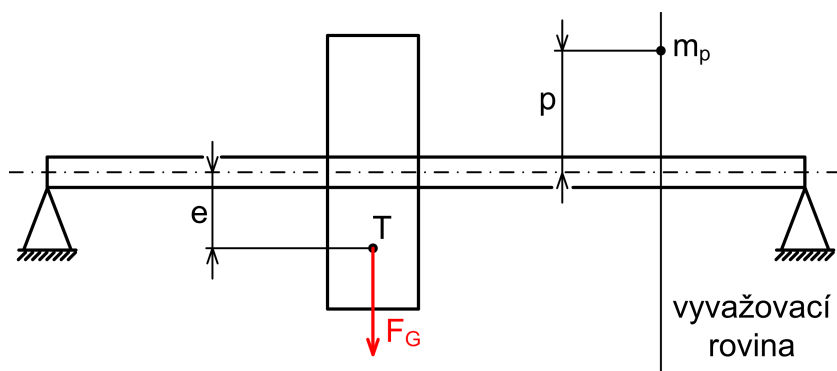
### Technické provedení

- a) Lehký stroj - jedná se o vyvažování za klidu. Stroj umístíme na vyvažovací trny a nastaví se tak, že těžiště je pod osou rotace. Na protilehlou stranu přidáme hmotu tak, abychom dosáhli toho, že se motor po novém usazení nebude otáčet.

Veličina, která charakterizuje míru nevyváženosti, se nazývá nevyváha a je vyjádřena vztahem

$$N = me \quad [\text{kgm}]$$

$e$  je excentrita - udává, o kolik je těžiště vychýleno z osy rotace.

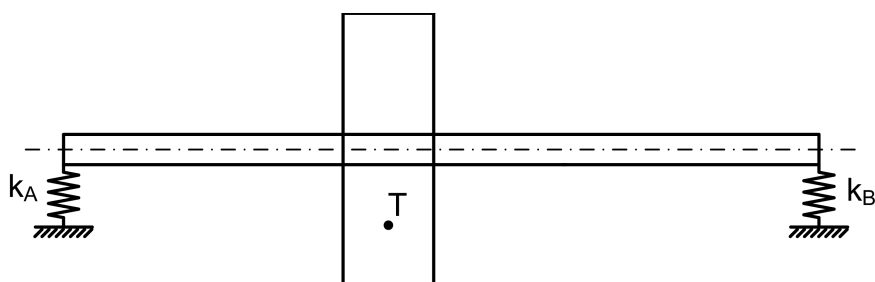


Musí platit

$$me = m_p p$$

$p$  je většinou jasně dána buď konstrukčně nebo technologicky.

- b) Těžký stroj - jedná se o vyvažování za rotace. Většina těles je poměrně hmotná a tak není možné je vyvažovat na vyvažovacích trnech. Proto jsou za tímto účelem konstruovány speciální stroje - vyvažovačky, které mají v ložiscích zabudované měřicí prvky, které jsou schopny zjišťovat parametry, které jsou nezbytné pro správné vyvážení, jako jsou excentrita, poloha excentrity, poloha těžiště, působící síly v ložiscích apod.

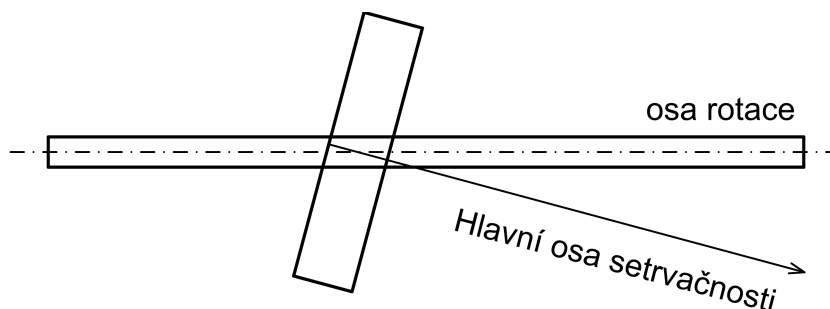


### 5.5.2 Eliminace momentových účinků - dynamické vyvažování

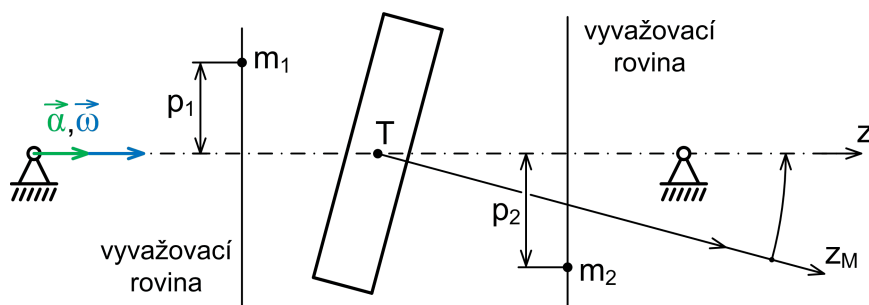
Při dynamickém vyvažování se snažíme odstranit přidané zatěžující účinky, které se nacházejí v momentových pohybových rovnicích. Tyto účinky se budou blížit nule, pokud bude

$$D_{xz} \rightarrow 0 \quad D_{yz} \rightarrow 0$$

Snahou i cílem při dynamickém vyvažování je dosáhnout stavu, kdy osa rotace je hlavní osou setrvačnosti



Při dynamickém vyvažování eliminujeme vliv momentu. Moment lze modelovat jako silovou dvojici, je proto nutné vyvažovat minimálně ve dvou vyvažovacích rovinách.



Technické řešení je možné pouze za rotace. Za klidu se tento vliv vůbec neprojeví. Provádí se opět na speciálních strojích jako v případě statického vyvažování.

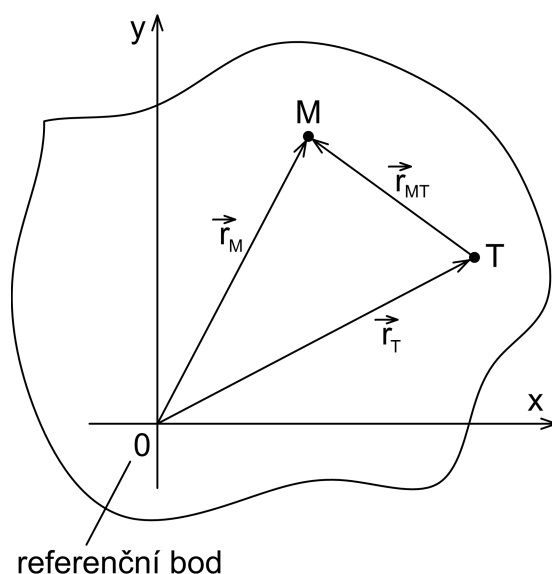
## 6 OBECNÝ ROVINNÝ POHYB

Jedná se o takový pohyb tělesa, jehož body opisují křivky v rovnoběžných rovinách.

Obecný rovinný pohyb se skládá z pohybu translačního, reprezentovaného referenčním bodem a pohybu rotačního okolo tohoto referenčního bodu.

Těleso, které koná obecný rovinný pohyb, má 3 stupně volnosti - traslace ve dvou na sebe kolmých směrech a rotace okolo osy, která je kolmá na směry translace.

### 6.1 Hybnost a moment hybnosti



$$\vec{r}_M = \vec{r}_T + \vec{r}_{MT}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_T + \vec{v}_{MT}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_T + \vec{a}_{MT}$$

$$\vec{v}_{MT} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MT}$$

Statický moment: 
$$\int_m \vec{r}_{MT} dm = 0$$

Hybnost tělesa při obecném rovinném pohybu je definovaná následovně

$$d\vec{H} = \vec{v}_M dm = (\vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}_{MT}) dm = \vec{v}_T dm + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{MT}) dm$$

$$\vec{H} = \int_m \vec{v}_T dm + \underbrace{\int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}_{MT}) dm}_{=0}$$

$$\vec{H} = m\vec{v}_T$$

$$\mathbf{H}_1 = m\mathbf{v}_1^T$$

Pro moment hybnosti vyjdeme ze vztahu

$$\begin{aligned} d\vec{b}_o &= \vec{r}_M \times \vec{v}_M dm = (\vec{r}_T + \vec{r}_{TM}) \times (\vec{v}_T + \vec{v}_{TM}) dm = \\ &= \vec{r}_T \times \vec{v}_T dm + \underbrace{\vec{r}_T \times \vec{v}_{TM} dm}_{=0} + \underbrace{\vec{r}_{TM} \times \vec{v}_T dm}_{=0} + \vec{r}_{TM} \times \vec{v}_{TM} dm \\ \vec{b}_o &= \int_m (\vec{r}_T \times \vec{v}_T) dm + \int_m (\vec{r}_{TM} \times \vec{v}_{TM}) dm \\ \vec{v}_{TM} &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{TM} \end{aligned}$$

$$\vec{b}_o = (\vec{r}_T \times \vec{v}_T)m + \int_m (\vec{r}_{TM} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{TM}) dm$$

$$\int_m (\vec{r}_{TM} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{TM}) dm \Rightarrow \int_m \mathbf{R}_1 \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{r}_1 dm$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_{TM} \quad \mathbf{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{TM}$$

pak

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dm$$

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix} dm = \int_m \begin{bmatrix} -\omega xy \\ -\omega yz \\ \omega(x^2 + y^2) \end{bmatrix} dm =$$

$$= \omega \int \begin{bmatrix} -xy dm \\ -yz dm \\ (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -D_{xy} \\ -D_{yz} \\ I_z \end{bmatrix}$$



$$\vec{b}_o = I_o \vec{\omega}$$

$$\mathbf{b}_{o1} = \mathbf{l}_o \omega_1$$

## 6.2 Pohybové rovnice

### 6.2.1 Pro obecný referenční bod

Vyjdeme z hybnosti a momentu hybnosti

$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}_T}{dt} = m \frac{d\vec{v}_T}{dt} = m\vec{a}_T$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_T$$

$$\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1^T$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} = \frac{dI_o\vec{\omega}}{dt} + \frac{d(\vec{r}_T \times \vec{v}_T)m}{dt} = I_o \frac{d\vec{\omega}}{dt} + m \left( \frac{d\vec{r}_T}{dt} \times \vec{v}_T + \vec{r}_T \times \frac{d\vec{v}_T}{dt} \right) =$$

$$= I_o\vec{\alpha} + m \underbrace{(\vec{v}_T \times \vec{v}_T + \vec{r}_T \times \vec{a}_T)}_{=0} = I_o\vec{\alpha} + (\vec{r}_T \times \vec{a}_T)m$$

$$\vec{M}_o = I_o\vec{\alpha} + (\vec{r}_T \times \vec{a}_T)m$$

$$\mathbf{M}_{o1} = \mathbf{l}_o\alpha_1 + (\mathbf{R}_1\mathbf{a}_1)m$$

V momentové pohybové rovnici se vyskytuje zrychlení  $a \Rightarrow$  silová a momentová rovnice jsou spolu svázány. Tuto vazbu je možné změnit tak, že opět zvolíme za referenční bod těžiště.

### 6.2.2 Pro referenční bod těžiště

Silová pohybová rovnice se nezmění

$$\vec{F} = m\vec{a}_T$$

$$\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1$$

V momentové rovnici se druhý člen stane nulovým, takže pohybová rovnice má tvar

$$\vec{M}_o = I_o\vec{\alpha}$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{l}_o\alpha_1$$

K této soustavě pohybových rovnic je nutné doplnit soustavu doplňkových rovnic, které udávají vazbu mezi translačním a rotačním pohybem. Doplňkové rovnice jsou pro řešení nutné.

#### Poznámka z kinematiky

Úhlová rychlost kolem pólu rychlosti a kteréhokoliv dalšího bodu tělesa jsou stejné.

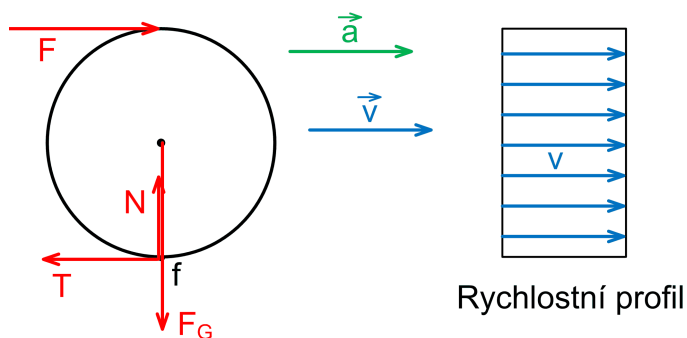
### 6.3 Kinetická energie obecného rovinného pohybu

Kinetická energie je dána součtem kinetických energií pro translační pohyb a kinetické energie pro rotační pohyb. Jako referenční bod se předpokládá, že je zvoleno těžiště.

$$E_k = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2$$

### 6.4 Analýza chování válečku

a) Váleček koná translační pohyb - dochází ke smýkání



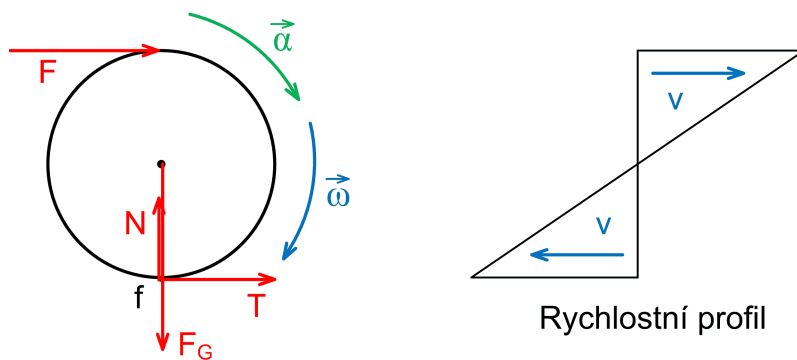
Těleso má jeden stupeň volnosti, pohyb je translační.

Pohybová rovnice má tvar:  $F - T = ma$

Statická rovnice:  $F_G = N$

Doplňková rovnice:  $T = fN$

## b) Váleček koná rotační pohyb



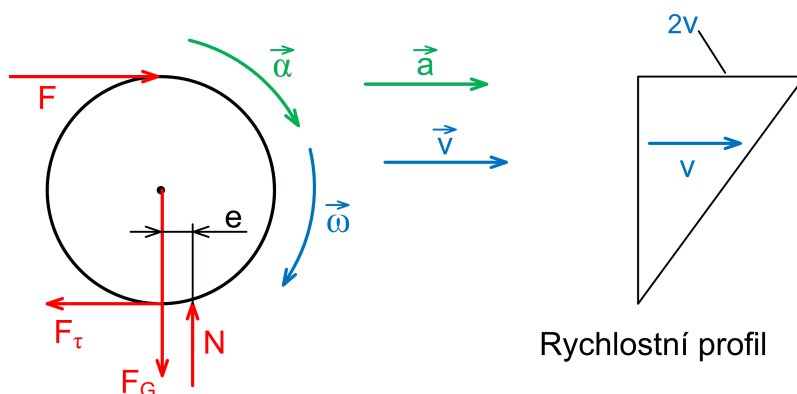
Těleso má jeden stupeň volnosti, pohyb je rotace.

Pohybová rovnice má tvar:  $FR - TR = I_o\alpha$

Statická rovnice:  $F_G = N$

Doplňková rovnice:  $T = fN$

## c) Váleček se valí



Těleso má dva stupně volnosti, pohyb je obecný rovinný.

Pohybové rovnice jsou

$$F - F_\tau = m\vec{a}$$

$$FR - Ne + F_\tau R = I\alpha$$

Statická rovnice:  $F_G = N$

Doplňková vazební rovnice:  $a = R\alpha$

Kontrola předpokladu valení:  $F_\tau < fN$

## 7 SFÉRICKÝ POHYB

Těleso koná sférický pohyb, jestliže existuje jeden bod tělesa, který je trvale v klidu. Trajektorie jsou křivky, které leží na kulové ploše. Jedná se o prostorové křivky.

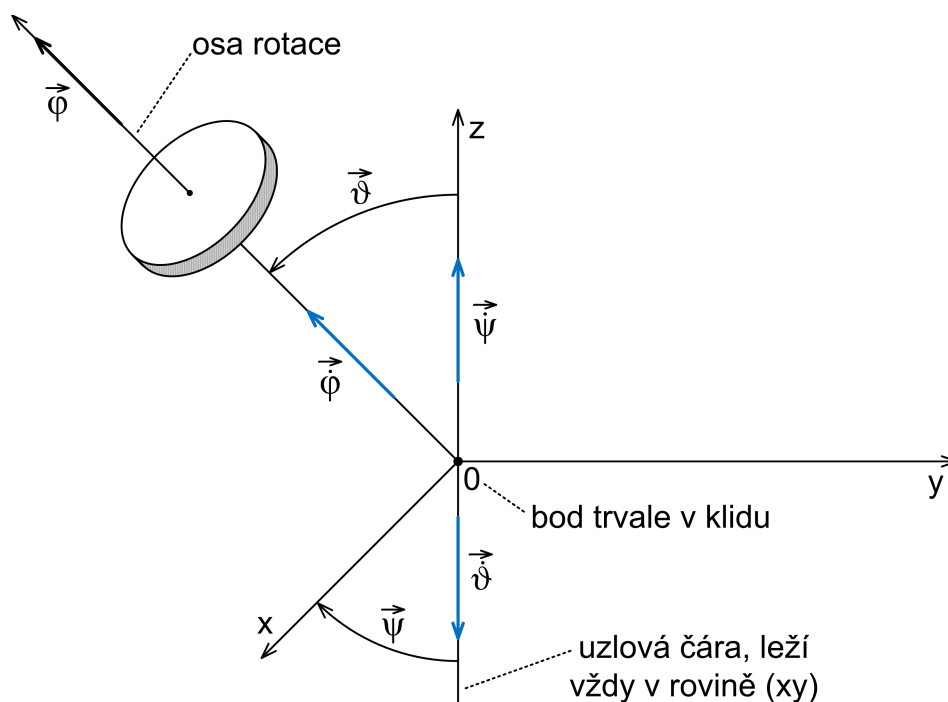
Těleso, které koná sférický pohyb, má 3 stupně volnosti a jedná se o 3 rotace kolem navzájem kolmých směrů.

Z historického hlediska jsou vypracovány dva přístupy, které řeší kinematiku sférického pohybu. První přístup je řešení pomocí Cardanových úhlů. Jde o pootočení kolem jednoho směru, čímž se vytvoří nová poloha a následné pootočení kolem této nové polohy a další pootočení kolem takto vzniklé polohy. Přístup je poměrně speciální a složitý.

Druhý přístup definoval Euler a pomocí tohoto přístupu definoval 3 úhly:

- rotace  $\vec{\varphi}$
- precese  $\vec{\psi}$
- nutace  $\vec{\vartheta}$

a jim odpovídající úhlové rychlosti  $\vec{\dot{\varphi}}$ ,  $\vec{\dot{\psi}}$ ,  $\vec{\dot{\vartheta}}$



Pro řešení sférického pohybu je výchozím bodem d'Alembertův teorém: „Sférický pohyb lze nahradit pohybem rotačním okolo okamžité osy otáčení.“

Na základě tohoto teorému definujeme okamžitou úhlovou rychlost

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\vartheta}}$$

Vztah mezi složkami okamžité úhlové rychlosti a Eulerovými úhly nám definují Eulerovy vzorce

$$\omega_{x_1} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi$$

$$\omega_{y_1} = -\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \sin \psi$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$$

pro pevný souřadný systém a

$$\omega_{x_2} = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi$$

$$\omega_{y_2} = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi$$

$$\omega_{z_2} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}$$

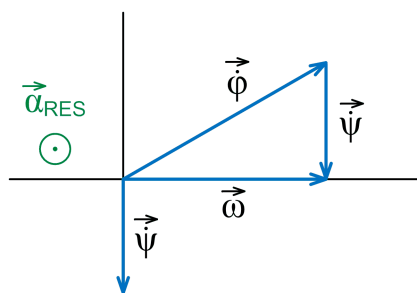
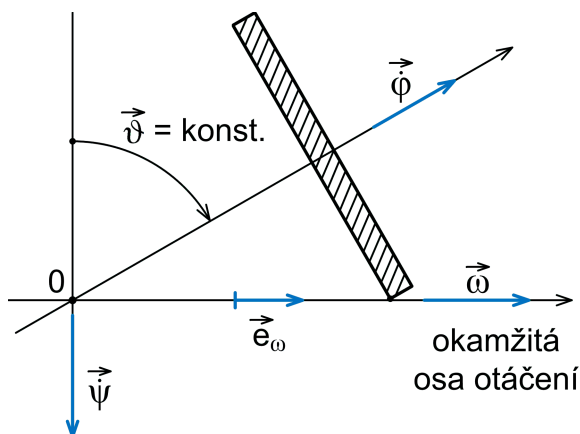
pro spoluotáčející systém souřadnic

Technicky zajímavými jsou případy, kdy je některý z Eulerových úhlů konstantní. Vezmeme-li jako konstantní úhel nutace, platí:

$$\vec{\vartheta} = \text{konst.} \Rightarrow \dot{\vec{\vartheta}} = \vec{0}$$

Potom pro okamžitou úhlovou rychlost musí platit

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}}$$



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\omega = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\omega + \vec{\omega} \frac{d\vec{e}_\omega}{dt} =$$

$$= \vec{e}_\omega \cdot \vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \Rightarrow \text{změna velikosti} + \text{změna polohy}$$

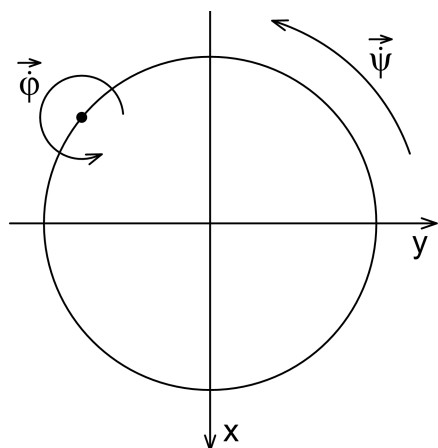
dále platí  $\omega_\omega = \dot{\psi}$

pro změnu polohy platí:  $\vec{\psi} \times (\vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}})$  a tato změna definuje Resalovo zrychlení

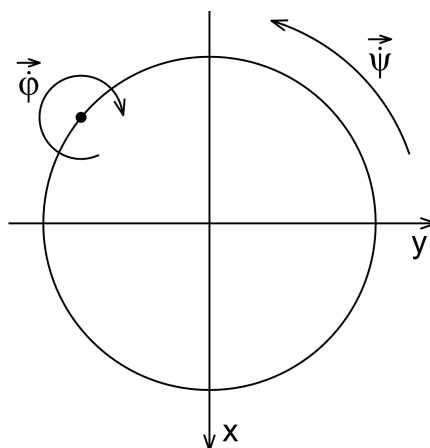
$$\vec{\alpha}_{Res} = \vec{\psi} \times (\vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}}) = \vec{\psi} \times \vec{\dot{\varphi}} + \underbrace{\vec{\psi} \times \vec{\dot{\psi}}}_{=0}$$

$$\vec{\alpha}_{Res} = \vec{\psi} \times \vec{\dot{\varphi}}$$

Podle vzájemné rotace rozeznáváme dva případy pohybu - precese

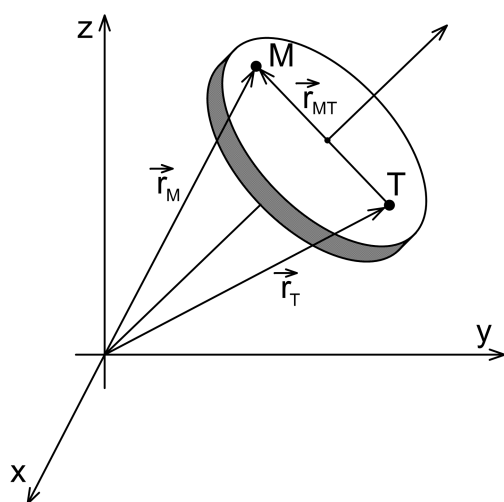


Souběžná precese



Protiběžná precese

## 7.1 Hybnost a moment hybnosti



$$\vec{r}_M = \vec{r}_T + \vec{r}_{TM}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_T + \vec{v}_{TM}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_T + \vec{a}_{TM}$$

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M$$

Pro hybnost sférického pohybu platí stejné zákonitosti jako pro pohyb rotační s tím rozdílem, že při sférickém pohybu jsou všechny veličiny okamžité, tj. mění svůj směr i svou velikost.

$$d\vec{H} = \vec{v}_M dm = (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) dm = \vec{\omega} \times (\vec{r}_T + \vec{r}_{TM}) dm = (\vec{\omega} \times \vec{r}_T + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{TM}}_{=0}) dm$$

$$\Rightarrow d\vec{H} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_T) dm = \vec{v}_T dm$$

$$\vec{H} = \int v_T dm = mv_T$$

$$\vec{H} = m\vec{v}_T \quad \mathbf{H}_1 = m\mathbf{v}_1^T$$

$v_T$  je okamžitá rychlost, tj. opět mění svůj směr i velikost.

Moment hybnosti je definován jako:

$$d\vec{b}_o = \vec{r}_M \times d\vec{H} = \vec{r}_M \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M) dm = \mathbf{R}_1 \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{r}_1 dm$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

pak

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_z y + \omega_y z \\ \omega_z x - \omega_x z \\ -\omega_y x + \omega_x y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_z y z + \omega_y y z \\ \omega_z x z + \omega_x x z \\ \omega_y x y + \omega_x x y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

potom

$$d\vec{b}_o = \int_m \begin{bmatrix} \omega_z y z + \omega_y y z \\ \omega_z x z + \omega_x x z \\ \omega_y x y + \omega_x x y \end{bmatrix} dm = \mathbf{l}_1 \mathbf{\omega}_1 = \mathbf{b}_{o_1}$$

$$\mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{l}_1 \mathbf{\omega}_1$$

Další, mnohem delší způsob odvození momentu hybnosti je následující. Vyjdeme ze spolurotujícího souřadného systému

$$d\vec{b}_{o_2} = \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) dm$$

a provedeme vektorové součiny, např. pomocí rozvoje determinantu

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{k}_2 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{bmatrix} = \vec{i}_2 \underbrace{(\omega_y z - \omega_z y)}_a + \vec{j}_2 \underbrace{(\omega_z x - \omega_x z)}_b + \vec{k}_2 \underbrace{(\omega_x y - \omega_y x)}_c$$

$$\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) = \begin{bmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{k}_2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix} = \vec{i}_2 \underbrace{(yc - zb)}_A + \vec{j}_2 \underbrace{(za - xc)}_B + \vec{k}_2 \underbrace{(xb - ya)}_C$$

$$\begin{aligned} A &= y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2 = \\ &= \omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x) = \omega_y z^2 - \omega_z yz - \omega_x xy + \omega_y x^2 = \\ &= -\omega_x xy + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z yz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_z x^2 - \omega_x xz - \omega_y yz + \omega_z y^2 = \\ &= -\omega_x xz - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} d\vec{b}_{o_2} &= \int_m \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} dm = \int_m \begin{bmatrix} (\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz) dm \\ (-\omega_x xy + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z yz) dm \\ (-\omega_x xz - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)) dm \end{bmatrix} = \\ &= \vec{b}_{o_2} = \begin{bmatrix} \omega_x I_x - \omega_y D_{xy} - \omega_z D_{xz} \\ -\omega_x D_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z D_{yz} \\ -\omega_x D_{xz} - \omega_y D_{yz} + \omega_z I_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\mathbf{b}_{o_2} = \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\omega}_2$$

Pomocí transformačních vztahů mezi souřadnými systémy lze tento vztah převést do pevného souřadného systému.

$$\mathbf{b}_{o_1} = \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1$$

Opět se zde jedná o okamžité veličiny, které mění svoji velikost i směr.

## 7.2 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice se odvodí ze své definice jako časové derivace hybnosti, resp. momentu hybnosti. Při derivování je potřeba dodržovat, že se v obou případech jedná o okamžité veličiny, tj. je potřeba provádět derivaci jako totální diferenciál.

Pohybové rovnice lze v základním tvaru napsat v následující podobě

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega}_H \times \vec{H} \qquad \vec{M}_o = \frac{\partial \vec{b}_o}{\partial t} + \vec{\omega}_{b_o} \times \vec{b}_o$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_{H_1} \mathbf{H}_1 \qquad \mathbf{M}_{o_1} = \frac{\partial \mathbf{b}_{o_1}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_{b_{o_1}} \mathbf{b}_{o_1}$$

kde:  $\omega_H$  je úhlová rychlost, s jakou rotuje vektor hybnosti okolo okamžité osy rotace

$\omega_{b_o}$  je úhlová rychlost, s jakou rotuje vektor momentu hybnosti okolo okamžité osy rotace

První člen v obou rovnicích vyjadřuje časovou změnu, druhý změnu prostorovou.

V případě, že souřadnicové osy budou hlavními osami setrvačnosti, pak jsou pohybové rovnice pouze momentové a lze je napsat v následujícím tvaru, rovnice se nazývají Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} \vec{M}_x &= I_x \vec{\alpha}_x + (I_z - I_y) \vec{\omega}_y \vec{\omega}_z \\ \vec{M}_y &= I_y \vec{\alpha}_y + (I_x - I_z) \vec{\omega}_x \vec{\omega}_z \\ \vec{M}_z &= I_z \vec{\alpha}_z + (I_y - I_x) \vec{\omega}_y \vec{\omega}_x \end{aligned}$$

## 7.3 Kinetická energie

Kinetická energie tělesa, které vykonává sférický pohyb lze napsat ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

kde  $I_o$  je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k okamžité ose otáčení. Lze ho vyjádřit jako součet momentů setrvačnosti k jednotlivým osám a dostaneme tvar

$$E_k = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - D_{xy} \omega_x \omega_y - D_{xz} \omega_x \omega_z - D_{yz} \omega_y \omega_z$$

což lze napsat v maticové podobě

$$E_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1$$

## 7.4 Technicky využitelné případy sférického pohybu

### 7.4.1 Regulární precese

Vychází ze skutečnosti, že úhel nutace je konstantní a tím pádem je úhlová rychlost nutace nulová. Vyskytuje se Resalovo úhlové zrychlení  $\vec{\alpha}_{Res}$

$$\vec{\alpha}_{Res} = \vec{\psi} \times \vec{\varphi}$$

na základě tohoto Resalova zrychlení se v soustavě objeví přidaný moment, gyroskopický moment, který je definován

$$\vec{M}_G = -I \vec{\alpha}_{Res}$$

Tento gyroskopický moment nám může významně ovlivnit zatížení působící v uložení tělesa.

### 7.4.2 Těžký setrvačník

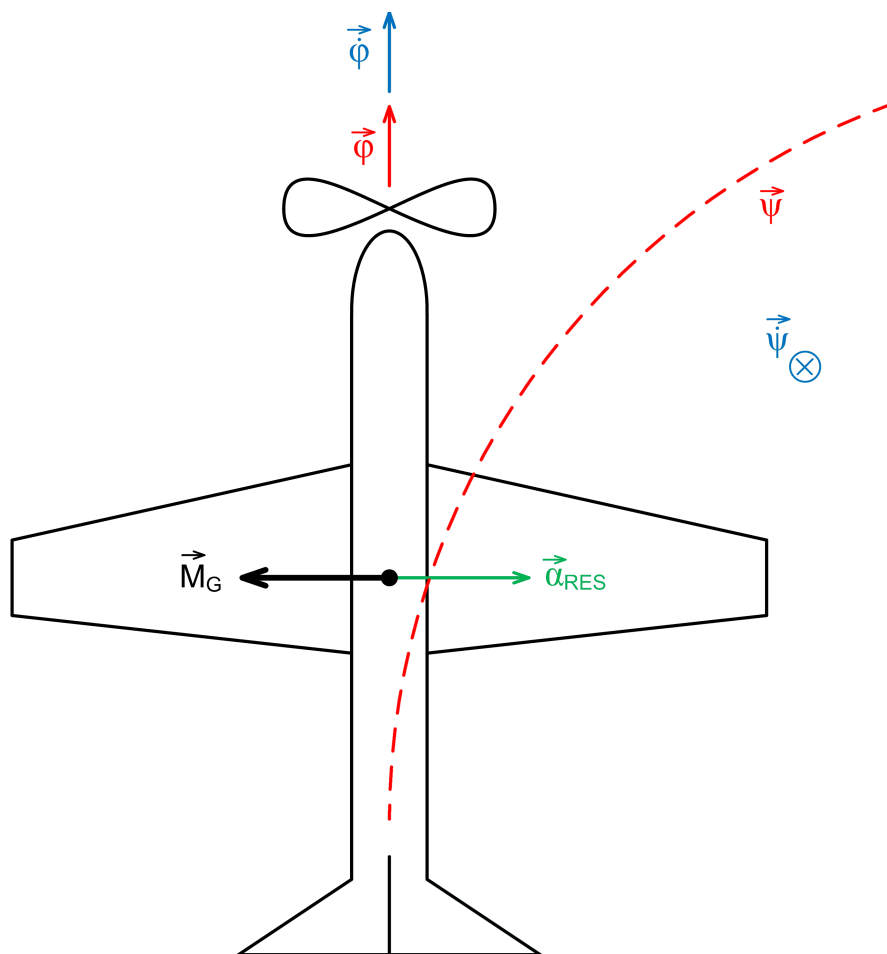
Jedná se o model tělesa, které je zatíženo pouze jednou vnější silou a to tíhovou a je vázáno mimo těžiště. Tohoto setrvačníku se využívá hlavně ke stabilizaci pohybu.

### 7.4.3 Lehký setrvačník

Jde o model tělesa, na které působí jedna vnější síla a těleso je vázáno v těžišti. Takto vázaný setrvačník má tendenci zachovávat po roztočení svoji polohu v prostoru a využívá se jako např. navigační zařízení.

#### Příklad LETADLO

Určit  $\alpha_{Res}$ ,  $M_G$



$\varphi \dots$ rotace

$\psi \dots$ precese

$$\vec{\alpha}_{Res} = \vec{\dot{\psi}} \times \vec{\dot{\phi}}$$

Gyroskopický moment  $M_G$

$$\vec{M}_G = -I\vec{\alpha}_{Res}$$

## 8 DYNAMIKA SOUSTAV TĚLES

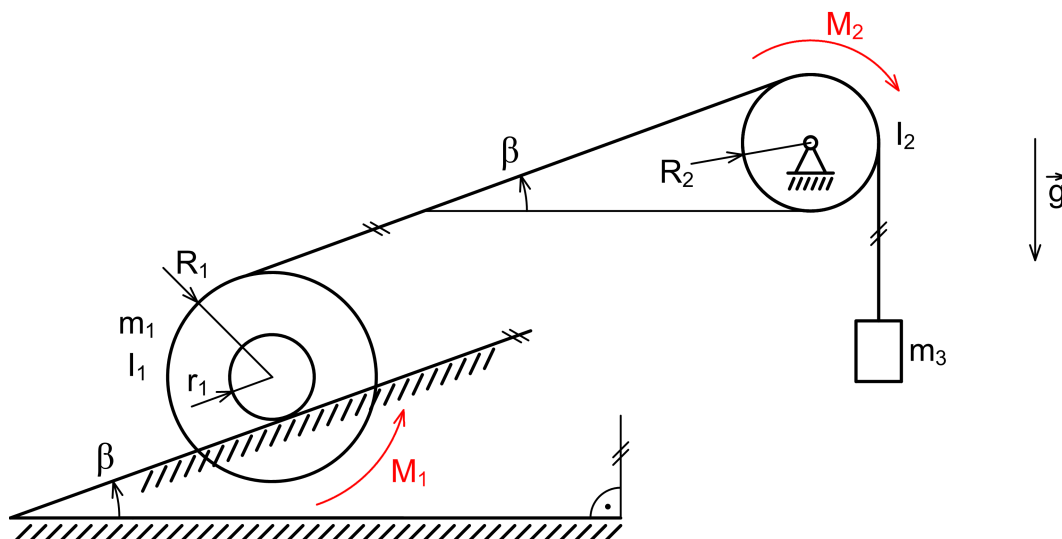
Stroje a technické objekty jsou zpravidla složeny z více těles. Jejich množství a složitost jsou dány složitostí daného problému. Cílem řešení problematiky je sestavit soustavu pohybových rovnic tak, abychom jejím řešením získali požadované veličiny.

### 8.1 Metoda uvolňovací

Metoda převádí vyšetřování soustavy těles na řešení pohybu jednoduchých jednotlivých těles. Jedná se o univerzální metodu, umožňující celkové dynamické řešení soustavy. K pohybovým rovnicím je většinou nutno připojit kinematické rovnice a rovnice vazeb tak, aby počet rovnic byl roven počtu neznámých. Pokud se podaří vyloučit všechny závislé veličiny, budeme mít soustavu  $n$  rovnic pro soustavu s  $n$  stupni volnosti.

Velkou výhodou metody je to, že jsme schopni získat všechny neznámé parametry soustavy.

#### Příklad



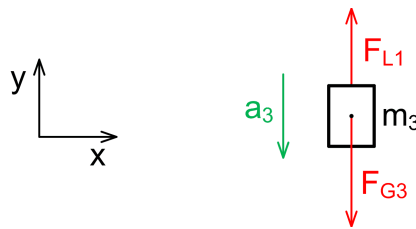
Tělesa konají následující pohyb:

- 1 - ORP
- 2 - RP
- 3 - TP

Soustava má jeden stupeň volnosti.

Uvolnění:

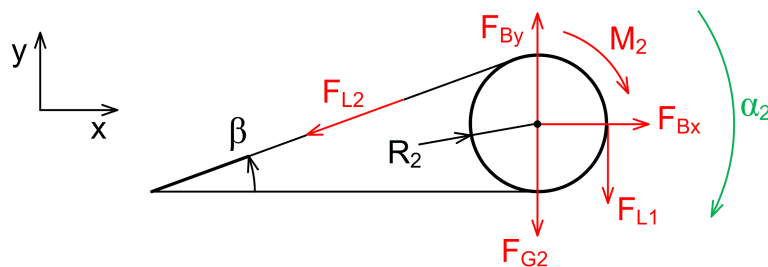
Těleso 3:



$$F_{G3} - F_{L1} = m_3 a_3$$

$$v_3 = \omega_2 R_2 \quad a_3 = \alpha_2 R_2$$

Těleso 2:



$$F_{Bx} - F_{L2} \sin \beta = 0$$

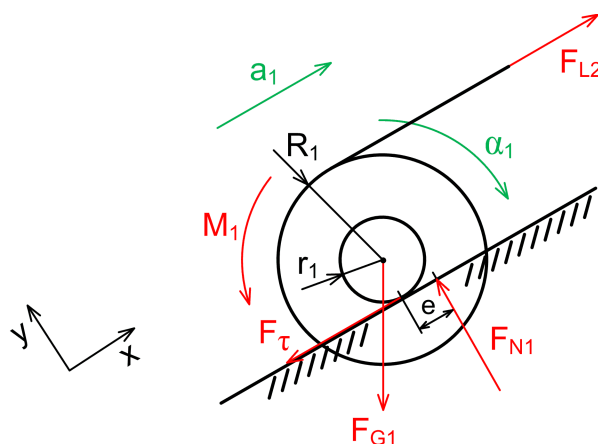
$$-F_{G2} + F_{By} - F_{L1} - F_{L2} \cos(90^\circ - \beta) = 0$$

$$M_2 + F_{L1} R_2 - F_{L2} R_2 = I_2 \alpha_2$$

$$\omega_2 R_2 = \omega_1 (R_1 + r_1) \rightarrow \alpha_2 R_2 = \alpha_1 (R_1 + r_1)$$

$$v_{1T} = \omega_1 R_1 \rightarrow a_{1T} = \alpha_1 R_1$$

Těleso 1:



$$F_{L2} - F_\tau - F_{G1} \sin \beta = m_1 a_1$$

$$F_{v1} - F_{G1} \cos \beta = 0$$

$$-M_1 + F_{L2} R_1 + F_\tau r_1 - F_{N1} e = I_1 \alpha_1$$

## 8.2 Metoda redukce

Metoda vznikla z poznatku, že pro soustavu s jedním stupněm volnosti lze napsat pohybovou rovnici ve tvaru shodném s pohybovou rovnicí jediného tělesa, na které byly redukovány všechny momentové a silové charakteristiky soustavy. Jedná se tedy o nahrazení skutečné soustavy soustavou jednodušší, kde však nejsou všechny dynamické vlastnosti shodné se soustavou původní. Metoda je výhodná především pro soustavy, u kterých neuvažujeme tření. Řešením je právě jeden kinematický nebo silový parametr zkoumané soustavy. Nelze pomocí této metody vypočítat vnitřní silové účinky. Redukci provádíme zásadně buď na těleso, které koná translační nebo rotační pohyb. Redukovat těleso, které koná obecný rovinný pohyb, by bylo příliš složité.

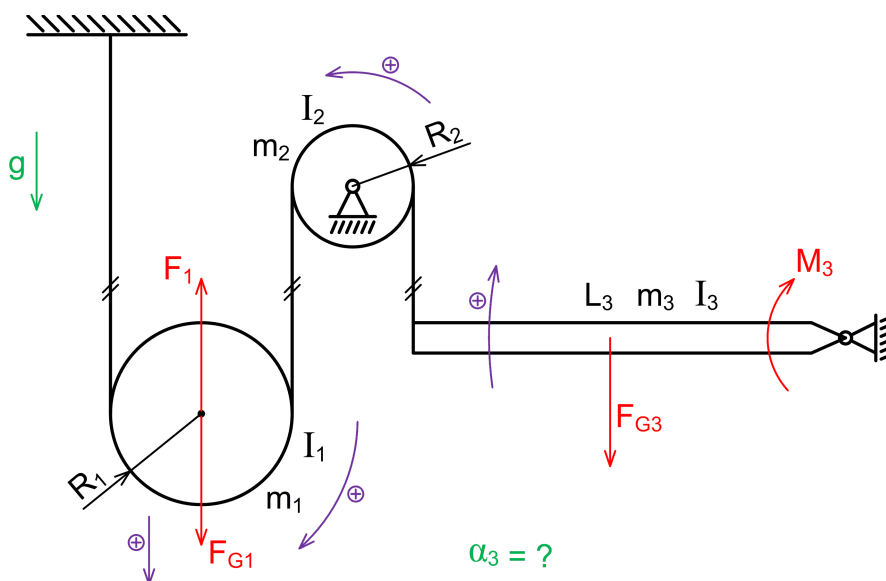
Při určování redukováných hodnot vycházíme z rovnosti kinematických energií původní a redukované soustavy a z rovnosti prací nebo výkonů původní a redukované soustavy. Musí platit:

$$E_{k,red} = E_{k,skut}$$

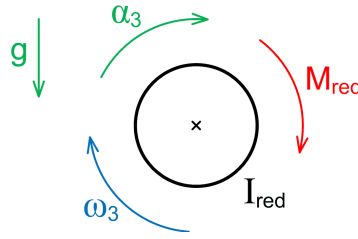
$$A_{red} = A_{skut} \quad \text{nebo} \quad W_{red} = W_{skut}$$

### Příklad

Zadání: Zjistěte zrychlení  $\alpha_3$



Redukujeme na třetí těleso, potřebujeme  $M_{red}$  a  $I_{red}$ , kinetické energie a výkony soustavy před a po redukci jsou stejné.



$$M_{red} = I_{red}\alpha_3$$

$$E_{k,red} = \frac{1}{2}I_{red}\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_{1T}^2 = E_{k,skut}$$

$$W_{red} = M_{red}\omega_3 = M_3\omega_3 - F_{G3}\frac{L_3}{2}\omega_3 + F_{G1}v_{1T} - F_1v_{1T} = W_{skut}$$

potřebujeme  $\omega_2$ ,  $\omega_1$  a  $v_{1T}$  v závislosti na  $\omega_3$ , utvoříme tedy dané kinematické rovnice

$$\omega_3 L_3 = \omega_2 R_2 \quad \omega_2 R_2 = \omega_1 2R_1 \quad v_{1T} = \omega_1 R_1$$

### 8.3 Metoda obecné rovnice dynamiky

Metoda obecné rovnice dynamiky vychází z d'Alembertova principu, pracuje se tedy se setrvačnými silami. K odvození obecné rovnice dynamiky se přistupuje přes princip virtuálních prací a princip virtuálních výkonů. Metoda je vhodná, chceme-li stanovit pouze jeden silový nebo kinematický parametr. Nefigurují v ní vnitřní silové účinky.

Obecnou rovnici dynamiky si můžeme definovat ve tvaru

$$\sum_i \left( \vec{Q}_i + \vec{Q}_{si} \right) \delta \vec{q}_i = 0$$

kde:  $\vec{Q}_i$  ..... zobecněný vnější silový účinek

$\vec{Q}_{si}$  ..... zobecněný setrvačný účinek

$\delta \vec{q}_i$  ..... virtuální posuv

## 8.4 Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Lagrangeovy rovnice 2. druhu jsou v současnosti nejužívanější metodou analytické mechaniky pro sestavování pohybových rovnic pro modelová tělesa a soustavy těles. Postup při sestavování pohybových rovnic je nezávislý na volbě souřadného systému. Další výhodou je skutečnost, že jedinými veličinami, které je třeba odvodit, jsou energie, což jsou veličiny skalární. Z odvozených rovnic jsou již od počátku vyřešeny vazbové síly, což dále zjednodušuje sestavování rovnic. Nevýhodou je to, že lze určit jen tolik nezávislých silových nebo kinematických parametrů, kolik je stupňů volnosti soustavy.

Lagrangeovu rovnici 2. druhu je možné uvést ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i}$$

kde:  $E_k$  ..... kinetická energie soustavy

$E_p$  ..... potenciální energie soustavy

$E_D$  ..... disipativní energie soustavy

$A$  ..... práce vnějších sil

$W$  ..... výkon vnějších sil

Pozn.: Gravitační síla  $\vec{F}_G$  - lze ji do pohybových rovnic zahrnout dvojím způsobem. Buď ve formě potenciální energie, nebo jako sílu vnější a tím do práce nebo do výkonu. Je však nutné, aby byla zahrnuta buď jedním nebo druhým způsobem, každopádně ne oběma, jinak se navzájem odečte.

## 9 ÚVOD DO ANALYTICKÉ MECHANIKY

Vektorová mechanika vychází bezprostředně z principů, které jsou vyjádřeny vztahy mezi veškerými veličinami. V tom případě je nutno respektovat směr jejich pohybu a s ohledem na něj respektovat smysl všech sil. Analytická mechanika vyjadřuje zákony mechaniky pomocí skalárních veličin.

### 9.1 Druhy vazeb

Tvar geometrického vektoru, který omezuje volný pohyb bodového tělesa, určují podmínkové rovnice, které se nazývají rovnice vazby. Každá vazba snižuje určitý počet stupňů volnosti dle svého charakteru.



Rovnice každé vazby může být zobrazena do tvaru  $f(x, y, z, t) = 0$

Takováto vazba se nazývá holonomní (zcela zákonitá). Vazby, které tuto podmínku nesplňují, se nazývají neholonomní. Příkladem je například tvar  $f(x, y, z, t) \geq 0$

Každá neholonomní vazba, která nezávisí explicitně na čase se nazývá skleronomní (tuhá), závisí-li na čase, nazývá se rheonomní (proměnlivá).

v úlohách, kde se pracuje s pojmy jako práce, se musí rozlišovat, zda složky reakcí konají nebo nekonají práci. Pokud práci nekonají, mluvíme o vazbách konzervativních (ideálních).

## 9.2 Druhy posunutí

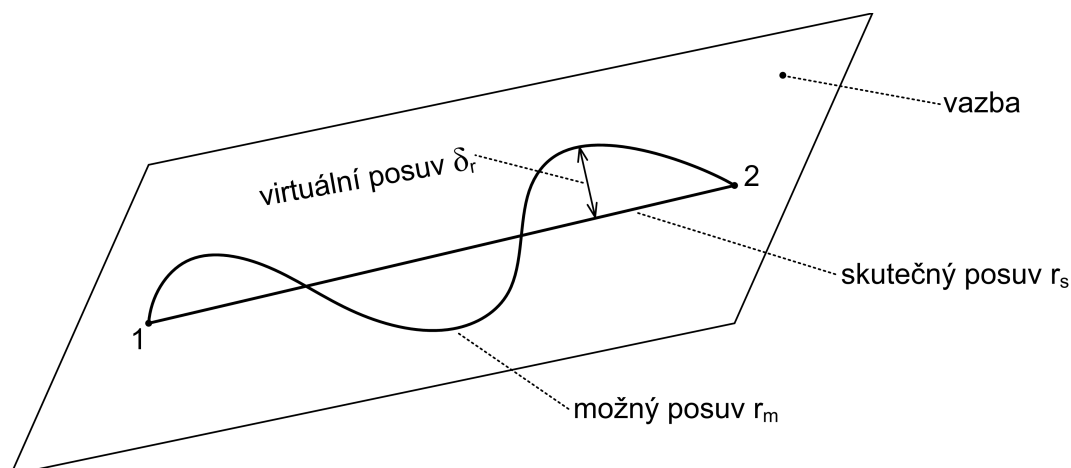
Z hlediska analytické mechaniky je zcela jedno, zda se jedná o posunutí podélné nebo o úhlové natočení.

Existují tři druhy posunutí

- Skutečné - je takové posunutí, které vyhovuje pohybové rovnici, okrajovým a počátečním podmínkám. Jeho posuv, který skutečně nastane.
- Možné - je takové posunutí, které vyhovuje pouze počátečním podmínkám. Možných posunutí bývá neskutečně mnoho, jsou omezeny jen rovnicí vazby a časovou závislostí.
- Virtuální - je to rozdíl mezi skutečným a možným posunutím

$$\delta_r = r_s - r_m$$

Vztah mezi jednotlivými posunutími ukazuje následující obrázek:



### 9.3 Zobecněné souřadnice

V „klasické“ mechanice se pro výklad a i pro řešení problému používá celá řada typů souřadnic, jejichž volba je závislá na vhodnosti pro konkrétní problém. Obecně lze ale zvolit kterýkoliv (kartézský, polární,...)

Splňují-li tyto souřadnice podmínku, že jsou navzájem nezávislé a že jejich počet je roven počtu stupňů volnosti (pak se takovéto souřadnice nazývají zobecněnými a označujeme je  $q_j$ , ( $j = 1..n$ ), kde  $n$  je počet stupňů volnosti

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

### 9.4 Zobecněné síly

Každé zobecněné souřadnici  $q_j$  odpovídá zobecněná síla  $Q_j$ , kterou můžeme určit z rovnice pro elementární práci, tzv. pracovních sil na virtuálních posuvech:

$$\delta A_j = Q_j \delta q_j$$

V analytické mechanice rozdělujeme síly na síly vazbové  $V_{\vec{F}}$  a síly pracovní  $P_{\vec{F}}$

Proti skutečným, v realitě probíhajícím elementárním posunutím  $d\vec{r}$ , se v analytické mechanice pracuje především se virtuálním posunutím  $\delta\vec{r}$ . Pak skalární součin virtuálního posunutí a pracovní síly se nazývá virtuální práce.

Virtuální posuv je možný, ale nepředpokládá se, že by se musel nutně realizovat. Jde o „okamžitá“ posunutí při přechodu z jednoho stavu do druhého.

Z matematického hlediska představují skutečné změny  $d\vec{r}$  diferenciály souřadnic, zatímco virtuální posuvy  $\delta\vec{r}$  jsou variace souřadnic.

Určení zobecněných sil:

Virtuální práce pro  $N$  bodů a  $n$  stupních volnosti je

$$\delta A_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \delta \vec{r}_j$$

kde virtuální posuvy jsou dány

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

Dosazením dostaneme

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

což porovnáním s rovnicí

$$\delta A_j = Q_j \delta q_j$$

je

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

kde

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i}$$

Zobecněná síla nemusí mít vždy rozměr síly. Pro lineární souřadnici má rozměr síly, pro úhlovou souřadnici má rozměr momentu, atd.

Důležité je, aby součin zobecněné souřadnice a zobecněné síly měl vždy rozměr práce.

## 9.5 Princip virtuálních prací

V předchozím odstavci byla definována zobecněná síla  $Q_i$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

Stejným způsobem můžeme definovat i zobecněnou setrvačnou sílu

$$Q_i^s = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^s \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

kde

$$\vec{F}_j^s = -m_j \ddot{\vec{r}}_j$$

Potom lze princip virtuálních prací definovat

$$\sum_{j=1}^n \left( \vec{F}_j + \vec{F}_j^s \right) \delta \vec{r}_j = 0$$

anebo

$$\sum_{j=1}^n \left( \vec{F}_j - m_j \vec{\ddot{r}}_j \right) \delta \vec{r}_j = 0$$

Tento základní princip analytické mechaniky říká, že virtuální práce vnějších a setrvačných sil při virtuálním posunutí je nulová. Rovnice principu virtuálních prací se také nazývá obecnou rovnicí dynamiky.

Princip virtuálních prací tak není nic jiného, než formalizovaný zákon o rovnováze těles.

## 9.6 Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Při odvozování vyjdeme z principu virtuálních prací pro soustavu  $N$  těles (bodů)

$$\sum_{j=1}^n \left( \vec{F}_j + \vec{F}_j^s \right) \delta \vec{r}_j = 0$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_n, t)$$

Variace  $\delta \vec{r}_j$  určíme pomocí výrazu

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

Princip virtuálních prací lze přepsat formálně do tvaru

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{\ddot{r}}_j \delta \vec{r}_j$$

Levou stranu rovnice pak můžeme upravit do tohoto tvaru

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

a stejně tak lze upravovat i pravou stranu

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{\ddot{r}}_j \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^N m_j \vec{\ddot{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

a dále lze závorku upravovat

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) - m_j \dot{\vec{r}}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right)$$

Pro rychlost každého  $j$ -tého tělesa platí

$$\dot{\vec{r}}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Z teorie parciálních diferenciálních rovnic lze odvodit

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i}$$

Z výše uvedeného můžeme dostat

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( m_j \vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_j \vec{v}_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_i} =$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{m_j v_j^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{m_j v_j^2}{2} \right)$$

Výraz  $\frac{m_j v_j^2}{2}$  je kinetická energie  $j$ -tého tělesa. Kinematická energie soustavy je pak rovna

$$E_k = \sum_{j=1}^N \frac{m_j v_j^2}{2}$$

Dosadíme-li všechny tyto závěry do počáteční upravené rovnice pro princip virtuálních prací, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

Vzhledem k tomu, že zobecněné souřadnice jsou navzájem nezávislé, musí platit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tento tvar představuje základní tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu pro soustavu těles s  $n$  stupni volnosti a s holonomními vazbami. Jedná se defacto o soustavu  $n$  diferenciálních rovnic 2. řádu.

Síly, které na soustavu těles (bodů) působí, jsou obecně dvojího druhu - potenciální a nepotenciální

$$Q_i = Q_{in} + Q_{ip}$$

Potenciální síly pro konzervativní soustavy lze vyjádřit ve tvaru

$$Q_{ip} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

Nepotenciální síly lze dále vyjádřit

$$Q_{in} = -\frac{\partial A}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i}$$

Potom lze Lagrangeovy rovnice napsat v rozšířeném tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i}$$

## 10 LINEÁRNÍ KMITÁNÍ S 1° VOLNOSTI

Většina mechanických soustav vykonává kmitavý pohyb, zkráceně kmitá. Teorie kmitání patří k nejdůležitějším částem mechaniky. Mechanické kmitání se rozděluje z mnoha hledisek. Podle toho, jaké jsou povahy jeho vzniku, je dělíme na buzené nebo nebuzené, podle typu matematického modelu na kmitání lineární nebo ne-lineární atd. Hledisek je celá řada.

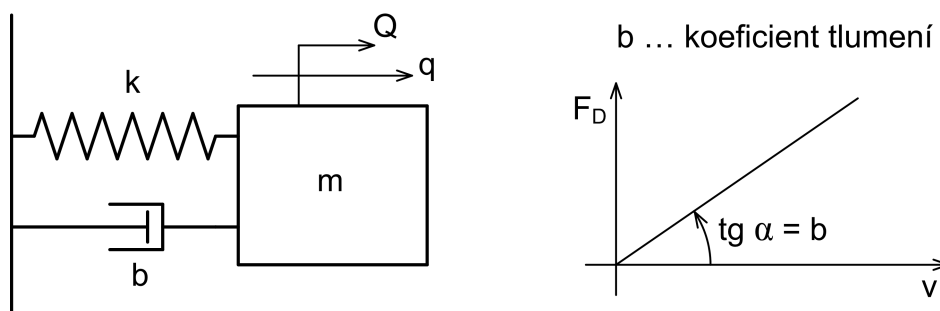
Nejjednodušší je teorie lineárního kmitání s jedním stupněm volnosti. Tato teorie má několik omezení, je však ve své podstatě dobře použitelná na vysvětlení takových jevů, které vznikají v mnoha mechanických soustavách.

Lineární kmitání je omezeno zásadní podmínkou:

Jedná se o malé kmity okolo rovnovážné polohy. Obecně platí, že úhly, které při kmitání vznikají, musí být menší jak  $5^\circ$ .

## 10.1 Pohybová rovnice

Nejjednodušší model



Odvození pohybových rovnic je nejlepší pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu.

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \qquad E_p = \frac{1}{2} k q^2$$

$$E_D = \frac{1}{2} b \dot{q}^2 \qquad W = Q \dot{q}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \qquad \frac{\partial E_k}{\partial q} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{q}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = k q \qquad \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}} = b \dot{q} \qquad \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} = Q$$

Pohybová rovnice je pak

$$m \ddot{q} + b \dot{q} + k q = Q$$

Toto je pohybová rovnice pro tento jeden konkrétní příklad. Obecně platí, že každá pohybová rovnice, která má tvar

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = Q^*$$

kde  $m^*, b^*, k^*, Q^*$  jsou konstanty, vykonává mechanické kmity. Jedná se o diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou. Řešení této rovnice se předpokládá ve tvaru

$$q = q_h + q_p$$

kde homogenní řešení předpokládá nulovou pravou stranu.

## 10.2 Homogenní řešení

Pohybovou rovnici, kterou řešíme, máme ve tvaru

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = 0$$

Pro další řešení si vytvoříme dva modely. Obecně se homogenním řešením říká volné kmitání. Obsahuje-li pohybová rovnice volného (a obecně jakéhokoliv) kmitání člen  $b\dot{q}$ , jedná se o tlumené kmity, není-li tento člen přítomen, jedná se o netlumené kmity.

### 10.2.1 Volné netlumené kmitání

Pohybová rovnice je ve tvaru

$$m^* \ddot{q} + k^* q = 0$$

Rovnici normalizujeme do tvaru

$$\ddot{q} + \frac{k^*}{m^*} q = 0$$

a zavedeme novou proměnnou, nazvanou vlastní úhlová frekvence a definovanou

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

čímž rovnice přejde do tvaru

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = 0$$

Řešení této diferenciální rovnice je např. pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\Omega_0$$

Řešení se předpokládá ve tvaru

$$q = Ce^{\lambda t}$$



dosazením dostaneme řešení

$$q = C_1 e^{i\Omega_0 t} + C_2 e^{-i\Omega_0 t}$$

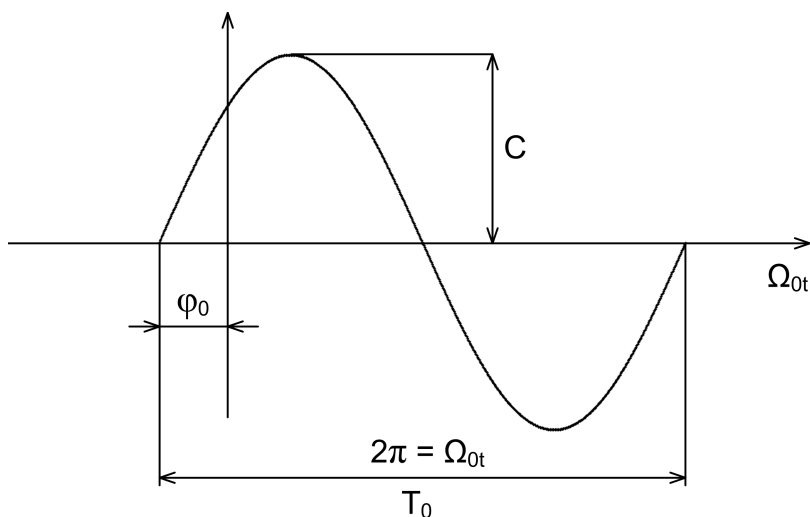
nebo pomocí Eulerových vztahů se dá převést

$$q = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$$

anebo do tvaru

$$q = C \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

Všechny tři předchozí zápisy představují harmonický pohyb



$T_0$  - perioda harmonického pohyb, udává, za jak dlouho se daný periodický děj opakuje. Převrácená hodnota

$$\frac{1}{T_0} = f_0 \quad \left[ \frac{1}{s}; \text{Hz} \right]$$

je vlastní frekvence. Ta udává, kolik opakování se provede za 1 sekundu.

Vztahy mezi vlastní úhlovou frekvencí, periodou a vlastní frekvencí jsou následující:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} [s] \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} [Hz]$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \Omega_0 = 2\pi f$$

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$ , resp.  $A, B$  nebo  $C, c_{f_0}$  se měří z počátečních podmínek, kdy musíme znát, jak se soustava chovala v čase  $t_0$ , jakou měla výchylku  $q_0$  a jakou rychlost  $\dot{q}_0$ .

Vztahy mezi konstantami jsou následující:

$$A = C_1 + C_2 \qquad B = i(C_1 - C_2)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \varphi_0 = \arctan \frac{A}{B}$$

Rychlost pohybu se obdrží derivací výchylky

$$\dot{q} = -A\Omega_0 \sin \Omega_0 t + B\Omega_0 \cos \Omega_0 t$$

$$\dot{q} = C\Omega_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

Další derivací dostaneme zrychlení

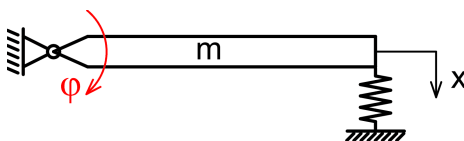
$$\ddot{q} = -A\Omega_0^2 \cos \Omega_0 t - B\Omega_0^2 \sin \Omega_0 t$$

$$\ddot{q} = -C\Omega_0^2 \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

Porovnáním vztahů pro výchylku a zrychlení lze dospět ze vztahu mezi těmito veličinami

$$\ddot{q} = -\Omega_0^2 q$$

Příklad - Zjistěte  $\Omega_0$



$$q = \varphi \qquad \dot{q} = \omega \qquad \ddot{q} = \alpha$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow E_k = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{q}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{q}^2$$

$$x = l \tan \varphi \quad \because \quad \text{pro } \varphi < 5^\circ \quad \tan \varphi = \sin \varphi = \varphi \Rightarrow x = l\varphi$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kl^2\varphi^2 = \frac{1}{2}kl^2q^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{q} \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{q} \qquad \frac{\partial E_p}{\partial q} = kl^2q$$

Pohybové rovnice:

$$\underbrace{\frac{1}{3}ml^2}_{m^*} \ddot{q} + \underbrace{kl^2}_{k^*} q = 0$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k^*}{m^*} \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

### 10.2.2 Volné tlumené kmitání

Z předchozího vyplynulo, že pohyb se opakuje nekonečně dlouho. To však odporuje pozorování a skutečnosti, že každý pohyb, pokud není rozkmitáván odezní.

Tlumení je důsledkem složitých a nevratných procesů, které disipují energii. Obecně lze tlumení rozdělit na vnější tlumení (odrazy vzduchu apod.), tlumení ve vazbách a vnitřní (materiálové) tlumení, které způsobuje odpor v materiálu.

Nejjednodušším popisem tlumení soustavy je rovnice

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = 0$$

Jedná se o rozšířenou rovnici netlumeného kmitání.

Rovnici opět normalizujeme do tvaru

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \Omega_0^2 q = 0$$

kde  $\delta = \frac{b^*}{2m^*}$  je součinitel dozínání. Jedná se opět o diferenciální rovnici druhého řádu a řešit ji opět budeme pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \Omega_0^2 = 0$$

jejíž kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}$$

O tom, jestli se bude jednat o 2 různé reálné, stejné reálné nebo 2 komplexně sdružené kořeny rozhoduje vztah mezi  $\delta$  a  $\Omega_0$ . Pro jednodušší popis si definujeme

$$b_r = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

což je veličina nazývaná poměrný útlum. Podle jeho velikosti lze rozlišit tři druhy pohybu.

#### I) Podkritické tlumení $b_r < 1$

Musí tedy platit, že  $\delta < \Omega_0$  a kořeny charakteristické rovnice jsou komplexně sdružená čísla.

Zavedeme-li

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$$

jako vlastní úhlovou frekvenci tlumeného kmitání, pak pro kořeny charakteristické rovnice dostaneme

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-\Omega^2} = -\delta \pm i\Omega$$

Řešení je potom ve tvaru

$$q = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t})$$

což se dá opět vyjádřit i v následujícím tvaru

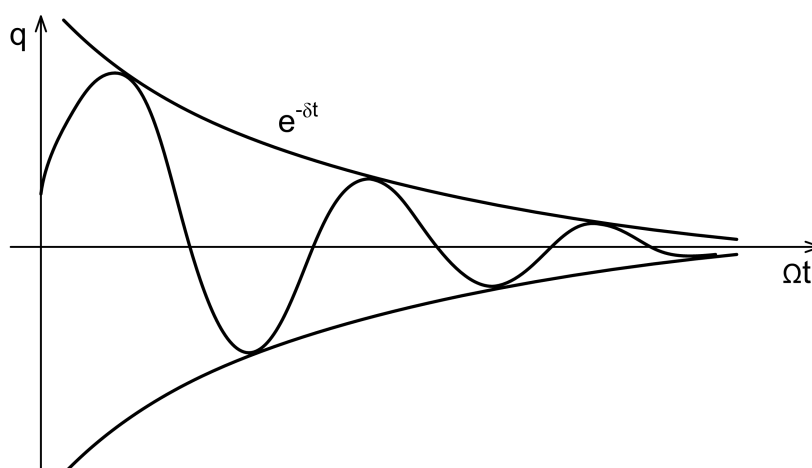
$$q = e^{-\delta t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

a ve tvaru

$$q = C e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Jedná se o periodický pohyb s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}$$



Z hlediska praxe je zajímavý poměr rychlosti v čase  $t$  a v čase o  $n$ -násobek periody. Dostaneme

$$\frac{q_t}{q_{t+nT}} = \frac{C e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0)}{C e^{-\delta(t+nT)} \sin(\Omega(t+nT) + \varphi_0)}$$

po úpravách lze dostat

$$C_n \frac{q_t}{q_{t+nT}} = n\delta T$$

Pro  $n = 1$  se tato hodnota nazývá logaritmický dekrement a je definovaná

$$\vartheta = \ln \frac{q_t}{q_{t+T}} = \delta T$$

což se dá dále upravit na

$$\vartheta = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}}$$

a pro velmi malá tlumení, kdy se  $\delta$  blíží hodnotě 1 je

$$\vartheta = \frac{2\pi\delta}{\Omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 2\pi b_r$$

Z tohoto vyplývá teoretický závěr, že tlumení by mělo zaniknout až v čase  $t \rightarrow \infty$ . Přestože to neodpovídá skutečnosti, je tento způsob popisu velmi rozšířený, protože dává celkem uspokojivé výsledky s výjimkou doby dokmitu.

## II) Nadkritické tlumení $b_r > 1$

Pro tento případ platí, že  $\delta > \Omega_0$  a tak jsou kořeny reálné různé. Zavedeme-li

$$\varkappa = \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}$$

pak řešení je ve tvaru

$$q = e^{-\delta t}(C_1 e^{\varkappa t} + C_2 e^{-\varkappa t})$$

což se dá upravit do tvaru

$$q = C e^{-\delta t} \sinh(\varkappa t + \varphi)$$

Sinus hyperbolický není periodická funkce a proto výsledný pohyb také není periodický. Nenastává tedy kmitavý pohyb.

## III) Kritické tlumení $b_r = 1$

Pro tento případ platí, že  $\delta = \Omega_0$  a řešení charakteristické rovnice je vícenásobný kořen.

Řešení je ve tvaru

$$q = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)$$

Také v tomto případě nedochází k periodickému pohybu, nenastane kmitání.

### 10.3 Partikulární řešení

V technické praxi je případ, kdy na těleso nepůsobí žádná vnější síla, která by jej uváděla do pohybu, poměrně řídkým jevem. Naopak na soustavu (těleso) působí většinou celá řada časově závislých sil.

Takovouto situaci popisuje právě partikulární řešení, pro něž je pohybová rovnice ve tvaru

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = Q^*(t)$$

Tuto rovnici, stejně jako v předchozích případech, normalizujeme a zavedeme známé součinitele  $\delta$  a  $\Omega_0$ , čímž dostaneme

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{Q^*(t)}{m^*}$$

Řešení je

$$q = q_h + q_p$$

Homogenní řešení jsme už proanalyzovali, nyní budeme analyzovat partikulární část, kdy vynecháme případy nadkritického a kritického tlumení.

Tvar partikulárního řešení závisí na tvaru budící síly. Obecně není možné pro všechny případy buzení odvodit analytické řešení, proto je řešení odvozeno pro speciální typy budících sil.

#### a) Harmonická síla

Harmonická síla je nejběžnější technická aplikace budící síly. Síla má tvar

$$Q^*(t) = Q_0^* e^{i\omega t}$$

S ohledem na pravou stranu lze řešení odhadnout ve tvaru

$$q_p = q_0 e^{i\omega t}$$

potom rychlost  $\dot{q}$  a zrychlení  $\ddot{q}$  jsou ve tvaru

$$\dot{q} = i\omega q_0 e^{i\omega t} \qquad \ddot{q} = -\omega^2 q_0 e^{i\omega t}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do pohybové rovnice, dostaneme

$$-\omega^2 m^* q_0 e^{i\omega t} + i\omega b^* q_0 e^{i\omega t} + k^* q_0 e^{i\omega t} = Q_0^* e^{i\omega t}$$

$e^{i\omega t}$  lze na obou stranách vykrátit a dostaneme

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^* q_0 + i\omega b^* q_0 + k^* q_0 &= Q_0^* \\ q_0(k^* - \omega^2 m^* + i\omega b^*) &= Q_0^* \end{aligned}$$

Pak pro amplitudu platí

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{Q_0^*}{k^* - \omega^2 m^* + i\omega b^*} = q_{Re} + iq_{Im} \\ q_0 &= \frac{Q_0^*}{k^* - \omega^2 m^*} + i \frac{Q_0^*}{\omega b^*} \end{aligned}$$

Jako každé komplexní číslo, i  $q_0$  má svůj modul (amplitudu) a fázi. Musí platit

$$q_A = \sqrt{q_{Re}^2 + q_{Im}^2} = \frac{Q_0^*}{\sqrt{(k^* - \omega^2 m^*)^2 + (b^* \omega)^2}}$$

Vytkneme z obou vztahů  $m^*$  a dosadíme do vztahů

$$\frac{k^*}{m^*} = \Omega_0^2 \quad \delta = \frac{b^*}{2m^*} \quad b_r = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

dostaneme

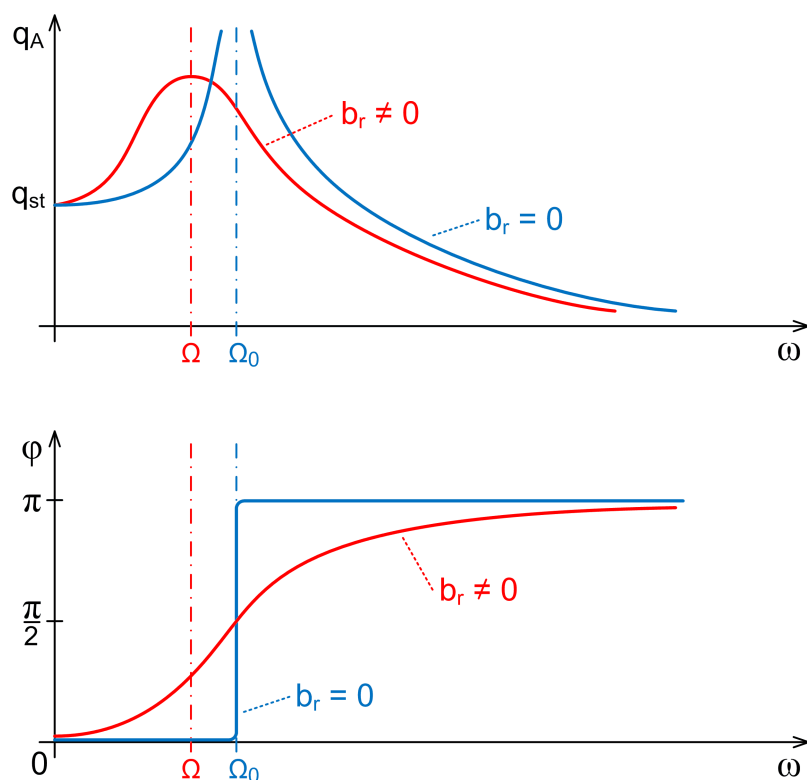
$$q_A = \frac{Q_0^*}{m^* \sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = \frac{Q_0^*}{k^* \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$

a pro fázi lze dostat

$$\tan \varphi = \frac{q_{Re}}{q_{Im}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}}{2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}}$$

Necháme-li si vykreslit obě závislosti, dostáváme tzv. amplitudofrekvenční charakteristiku a fázověfrekvenční charakteristiku





Z tvaru amplitudofrekvenční charakteristiky lze vidět, že ze situace, kdy  $\omega = \Omega_0$ , dojde k růstu amplitudy nad všechny meze. Tomuto jevu se říká rezonance a je pro většinu strojních zařízení škodlivý a nebezpečný.

V praxi nedochází k rezonanci při stavu, kdy  $\omega = \Omega_0$ , protože každá strojní součást má tlumení. Pak k rezonanci dojde pro  $\omega = \Omega$  a rezonance už neroste nad všechny meze, ale i v tomto případě může narůst i o několik řádů. Je proto naprosto nezbytné při návrhu součásti provádět analýzu vlastních frekvencí a zjišťovat případné rezonance.

V případě, že by měl nastat tento jev, je nutné přestavět součást a zajistit, aby rezonanční stav byl dostatečně daleko od stavu provozního.

Fázověfrekvenční charakteristika nám udává, jaký je vztah mezi odezvou a budící silou. Je vidět, že až do rezonance jsou ve fázi, v rezonanci se mění směr a těleso se pohybuje oproti působící síle.

#### b) Buzení nevývahou

V kapitole o vyvažování jsme dospěli k názoru, že i když se vždy snažíme těleso vyvážit, nikdy se to nepodaří úplně. Při pohybu pak na těleso působí odstředivá síla, která je dána vztahem

$$F_o = m_n e \omega^2 \sin \omega t$$

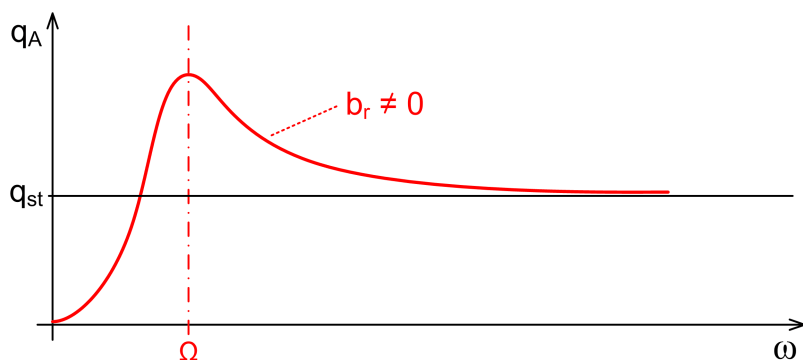
$e$ ...excentrita

Potom je pohybová rovnice ve tvaru

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = m_n e \omega^2 \sin \omega t$$

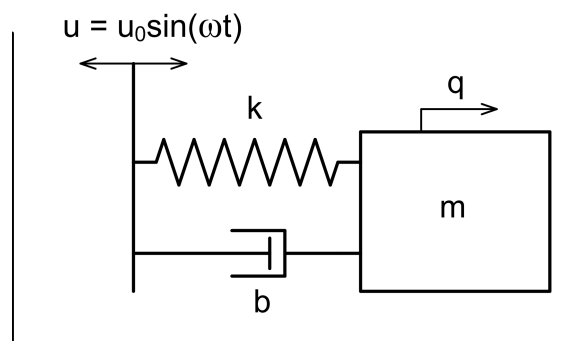
Stejně jako pro harmonickou sílu je amplituda výsledného kmitání komplexní veličina a její amplitudová a fázová charakteristika se řídí dle vztahu

$$q_A = \frac{m_n e \omega^2}{k^* \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$



### c) Kinematické buzení

Jedná se o další technicky velice rozšířený typ buzení, který se projevuje tím, že základ tělesa se pohybuje podle nějaké časové závislosti, nejjednodušší dle harmonické rovnice. Tento případ je možné modelovat pomocí následujícího obrázku



Potom má pohybová rovnice tvar

$$m^* \ddot{q} + b^* (\dot{q} - \dot{u}) + k^* (q - u) = 0$$

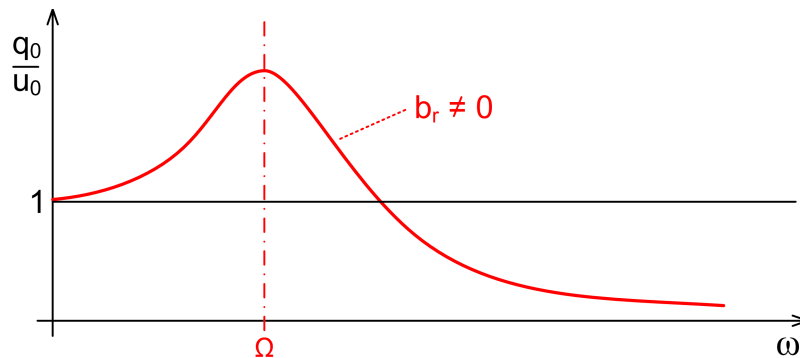
Tato rovnice se dá převést na tvar

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = (i\omega b + k) u_0 e^{i\omega t}$$

což je formálně opět stejná rovnice jako pro harmonickou sílu. Závislost poměru amplitudy odezvy ku amplitudě buzení je

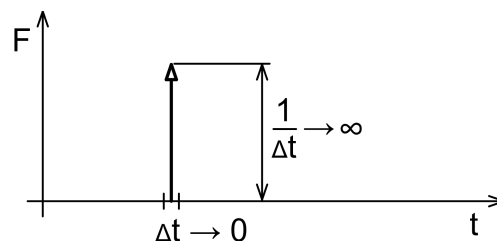
$$\frac{q_0}{u_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$

a grafická závislost je

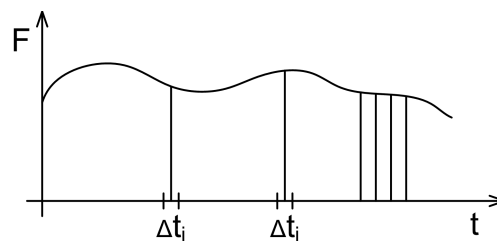


#### d) Obecné buzení

I když není možné řešit odezvu pro obecný průběh síly v uzavřeném tvaru, je možné pro různé časové okamžiky získat odezvu. Pro tento případ se používá Dirackova funkce, která je definovaná dle obrázku



Každou obecnou funkci je potom možné vyjádřit jako množinu po sobě jdoucích Dirackových impulzů

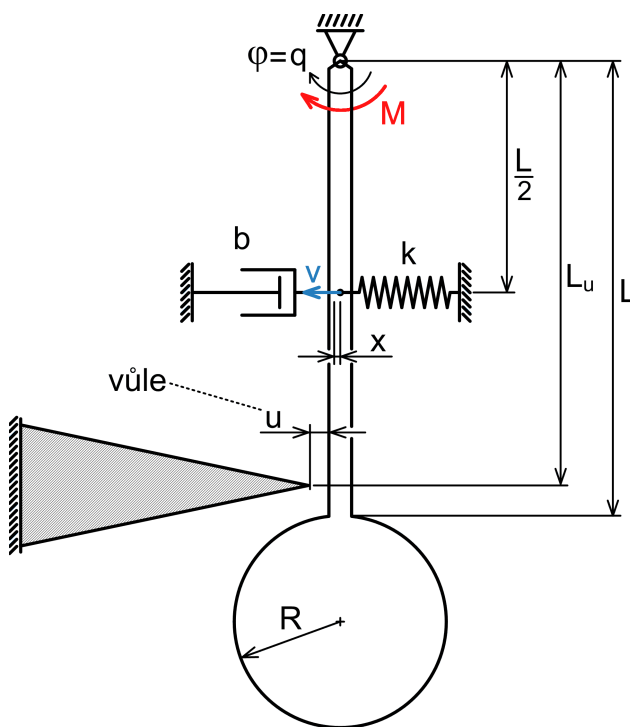


Řešení se potom provádí v nějakém časovém intervalu  $(0, t)$  pomocí konvolutorního Dührhammela integrálu

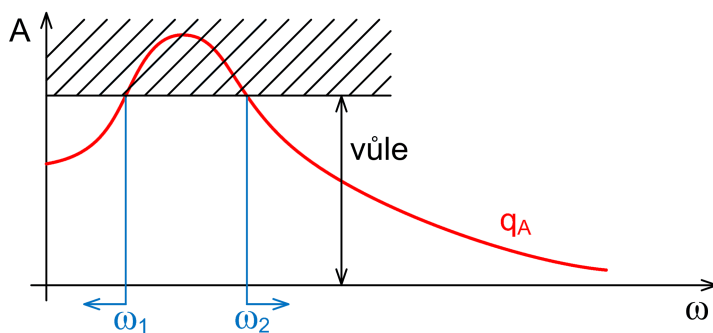
$$q(t) = \frac{1}{m^* \Omega} \int_0^t Q^*(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \Omega(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

## 10.4 Vzorový příklad

**Zadání:** Určete, při jakých frekvencích  $\omega \in \langle \omega_1; \omega_2 \rangle$  buzeného kmitání momentem  $M$  dle rovnice  $M = M_0 \sin \omega t$  bude kyvadlo narážet do podpory, jestliže máme zadanou určitou vůli  $v$ .



Zadání si můžeme názorně představit na následujícím grafu - amplitudofrekvenční charakteristice. Hledáme frekvence, kdy dojde k tomu, že velikost amplitudy překročí zadanou vůli.



Rovnice pro amplitudu:

$$q_A = \frac{Q_0}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}$$

kde platí

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad b_r = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

Určíme si zobecněnou souřadnici

$$\varphi = q \quad \omega_k = \dot{q} \quad \alpha = \ddot{q}$$

Navíc pro malé úhly platí

$$\tan \varphi = \varphi = \frac{x}{\frac{L_u}{2}} \Rightarrow x = \varphi \frac{L_u}{2} = q \frac{L}{2}$$

Příklad řešíme pomocí Lagrangeových rovnic, napíšeme si proto jednotlivé energie a výkon

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega_k^2 = \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{L_u}{2} \right)^2 q^2$$

$$E_D = \frac{1}{2} b v^2 = \frac{1}{2} b \dot{x}^2 = \frac{1}{2} b \left( \frac{L_u}{2} \right)^2 \dot{q}^2$$

$$W = M \omega_k = \dot{q} M_0 \sin \omega t$$

Lagrangeova rovnice 2.druhu pro náš případ, obecně

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i}$$

Vypočítáme příslušné derivace

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = I \dot{q} \rightarrow \frac{d}{dt} (I \dot{q}) = I \ddot{q} \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = k \left( \frac{L_u}{2} \right)^2 q \quad \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = b \left( \frac{L_u}{2} \right)^2 \dot{q}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} = M_0 \sin \omega t$$

Dosadíme zderivované energie zpět do rovnice (členy řadíme od nejvyšší derivace)

$$\underbrace{I}_{m^*} \ddot{q} + \underbrace{b \left( \frac{L_u}{2} \right)^2}_{b^*} \dot{q} + \underbrace{k \left( \frac{L_u}{2} \right)^2}_{k^*} q = \underbrace{M_0}_{Q_0^*} \sin \omega t$$

Vypočítané  $m^*$ ,  $b^*$  a  $k^*$  dosadíme do rovnic na začátku

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{k \left( \frac{L_u}{2} \right)^2}{I}} \quad \delta = \frac{b^*}{2m^*} = \frac{b \left( \frac{L_u}{2} \right)^2}{2I}$$

Nakonec je nutné výsledky těchto rovnic dosadit do původní rovnice pro amplitudu, čímž dojdeme k vlastním frekvencím  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ . (Jedná se o kvadratickou rovnici, proto dvě)

$$q_A = \frac{Q_0^*}{k^* \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right)^2 + \left( 2b_r \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2}} = \frac{u}{L_u}$$

Maximální úhel kmitu kyvadla  $\varphi_{max}$  zjistíme z rovnice (pro malé úhly)

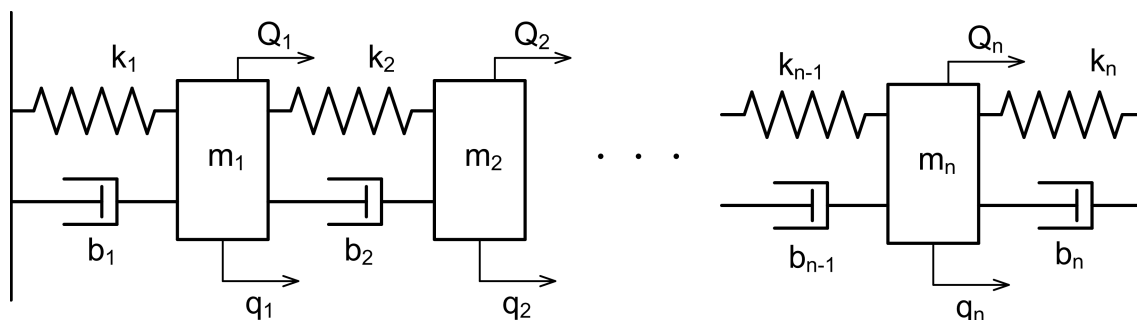
$$\varphi_{max} = \frac{u}{L_u} \Rightarrow u = \varphi_{max} L_u$$

čímž jsme převedli zobecněnou proměnnou  $q$  [rad] na  $u$  [mm]

## 11 KMITÁNÍ S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

I když je model s jedním stupněm volnosti velice dobrý a dá se na něm vysvětlit celá řada jevů a efektů, k popisu reálných soustav většinou nevystačí. V praxi většinou chceme znát více vlastních frekvencí než jednu a tak používáme modely s více stupni volnosti.

Nejjednodušší model soustavy s více stupni volnosti je tento



Pomocí některé metody pro řešení dynamiky soustav těles dostaneme  $n$  pohybových rovnic, které se dají zapsat pomocí maticového zápisu ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

$\mathbf{M}$  je matice hmotnosti

$\mathbf{B}$  je matice tlumení

$\mathbf{K}$  je matice tuhosti

$\ddot{\mathbf{q}}$  je vektor zrychlení

$\dot{\mathbf{q}}$  je vektor rychlostí

$\mathbf{q}$  je vektor výchylek

$\mathbf{Q}$  je vektor zatížení

Tato maticová diferenciální rovnice popisuje obecný případ kmitající soustavy s  $n$  stupni volnosti. Tvar matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  je zcela závislý na topologii té které dané soustavy.

## 11.1 Volné netlumené kmitání

Řešení volného netlumeného kmitání je principiálně stejné jako pro soustavu s jedním stupněm volnosti.

Příslušná pohybová rovnice má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$$

za předpokladu, že pohyb bude harmonický, lze řešení předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\Omega_0 t}$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor amplitud kmitání. Zrychlení je dáno druhou derivací

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\Omega_0^2 \mathbf{u}e^{i\Omega_0 t}$$

Dosazením do pohybové rovnice dostaneme

$$-\Omega_0^2 \mathbf{M}\mathbf{u}e^{i\Omega_0 t} + \mathbf{K}\mathbf{u}e^{i\Omega_0 t} = 0$$

a po úpravě

$$(\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = 0$$

Soustava má nelineární řešení, když je závorka nulová, takže musí platit

$$\det(\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M}) = 0$$

Tento determinant se nazývá frekvenční charakteristika. Jeho rozvinutím dostáváme polynom  $n$ -tého řádu, jehož řešením je  $n$  hodnot. Tyto hodnoty představují  $n$  vlastních úhlových frekvencí

$$\Omega_{0_1} < \Omega_{0_2} < \dots < \Omega_{0_n}$$

První závěr: Soustava s  $n$  stupni volnosti má  $n$  vlastních úhlových frekvencí.



Vlastní úhlové frekvence lze sestavit do tzv. spektrální matice  $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Omega_{0_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{0_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{0_n} \end{bmatrix}$$

Dosadíme-li některou konkrétní vlastní frekvenci do rovnice

$$(\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0$$

měli bychom dostat vektor odpovídajících amplitud. Záruka je však z definice nulová, takže bychom dostali vektorový počet řešení  $\mathbf{u}_n$ . Z toho důvodu lze určit pouze vzájemné poměry prvků ve vektoru  $\mathbf{u}_n$

$$\frac{u_{1n}}{u_{1n}} ; \frac{u_{2n}}{u_{1n}} ; \dots ; \frac{u_{nn}}{u_{1n}} \quad \text{a nebo} \quad \frac{u_{1n}}{u_{2n}} ; \frac{u_{2n}}{u_{2n}} ; \dots ; \frac{u_{nn}}{u_{2n}} \quad \text{atd.}$$

lze tedy dostat  $n$  různých posloupností, které všechny definují vlastní tvar kmitu. Proto se těmto tvarům říká vlastní vektory ( $\mathbf{v}_n$ ). Zvolit můžeme kterýkoliv, ale prakticky převažuje například ten, kdy je axiální hodnota v daném vektoru 1. Říkáme, že vektor normujeme. Žádáme, aby platilo například:

$$\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n = 1 \quad \text{Euklidovo normování}$$

$$\mathbf{v}_n^T \mathbf{K} \mathbf{v}_n = 1 \quad \text{normování podle matice tuhosti}$$

$$\mathbf{v}_n^T \mathbf{M} \mathbf{v}_n = 1 \quad \text{normování podle matice hmotnosti}$$

atd.

Kmitá-li soustava  $v$ -tým tvarem kmitu, je odezva

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{v}_n e^{i\Omega_{0n}t}$$

Obecné řešení je součet všech možných vlastních tvarů kmitů

$$\mathbf{q}_n = \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0n}t}$$

Vlastní vektory lze shrnout do matice, která se nazývá modální  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

## 11.2 Vybuzené kmitání

Uvažujme pro jednoduchost buzení harmonickou silou, kdy pohybová rovnice bude mít tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$$

Obecné řešení je

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_h + \mathbf{q}_p$$

zabývejme se dále jen ustáleným řešením, tj. partikulární částí, kterému bude odpovídat řešení ve tvaru

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{S} e^{i\omega t}$$

Uděláme první i druhou derivaci a dosadíme do pohybové rovnice a po úpravách dostaneme

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})\mathbf{S} = \mathbf{Q}_0$$

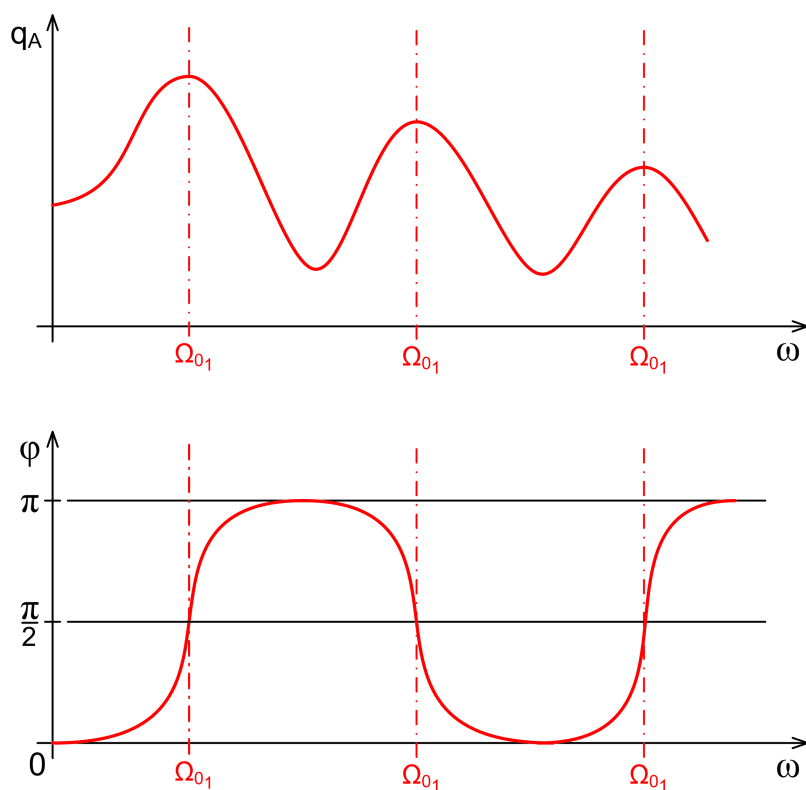
Z této rovnice lze získat závislost amplitudy  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}_0$$

Tato amplituda je opět často komplexní, stejně jako v případě kmitání s jedním stupněm volnosti a taktéž můžeme určit amplitudu a fázi.

Závislost obou na vlastní frekvenci se opět nazývá amplitudofrekvenční charakteristika a fázověfrekvenční charakteristika.

Jejich průběh je následující



## 12 ÚVOD DO NELINEÁRNÍHO KMITÁNÍ

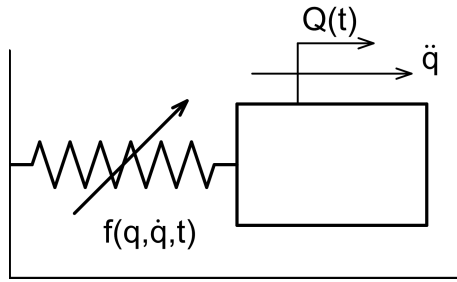
Lineární teorie kmitání sice dokáže popsat mnohé jevy, které se u kmitajících soustav vyskytují, její omezení na „malé kmity“ však někdy mohou být značně limitující. V takových případech je třeba doplnit soustavu diferenciálních rovnic o nelineární členy, které modelují nelineární jevy a členy.

Nelineární soustavu lze charakterizovat jako mechanickou soustavu, která obsahuje alespoň jeden prvek, který má charakteristiku popsanou nelineární závislostí silových a kinematických (deformačních) veličin.

Nelinearita může mít (a většinou i má) vliv na chování celé soustavy. Lze tedy vyvodit následující závěry:

- Nelineární kmitání vede na nelineární diferenciální rovnice
- Při řešení nelineárních diferenciálních rovnic neplatí princip superpozice a všechny z něj vyplývající závěry.

Nejjednodušší model nelineární soustavy je



Dá se popsat nelineární diferenciální rovnicí

$$m\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t) = Q(t)$$

Nelineární složka se dá formálně přepsat do tvaru  $f(q, \dot{q}, t)q$  a pak je pohybová rovnice ve tvaru

$$m\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t)q = Q(t)$$

Chceme-li řešit otázku vlastních frekvencí, stačí nám homogenní rovnice

$$m\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t)q = 0$$

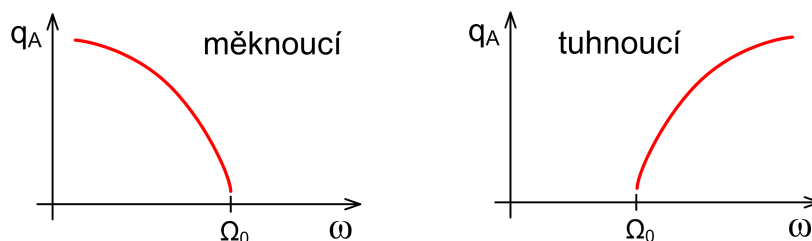
Tuto rovnici normalizujeme

$$\ddot{q} + \frac{f(q, \dot{q}, t)}{m} q = 0$$

pak  $\Omega_0^2 = \frac{f(q, \dot{q}, t)}{m}$  je závislá na výchylce.

Platí: Vlastní frekvence u nelineárních soustav jsou závislé na výchylce kmitání.

Obecně jsou dva možné průběhy závislosti vlastních frekvencí na výchylce



Závislostem se říká skeletové křivky. Jsou buď měknoucí (degresivní) nebo tuhnoucí (progresivní).

## 12.1 Přibližné metody řešení nelineárních pohybových rovnic

### 12.1.1 Rozvoj do Taylorovy řady

Při této metodě předpokládáme, že nelineární funkce je závislá pouze na výchylce  $q$ , nebo na jiném parametru, ale jen na jednom.

Potom můžeme tuto funkci převést do Taylorova rozvoje

$$f(q) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots$$

kde  $a$  je bod, v jehož okolí chceme linearizovat dané nelinearity.

Potom vezmeme jen první dva členy řady, čímž získáme lineární závislost

$$f(q) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

čímž jsme převedli nelineární problém na lineární.

Metoda je použitelná za předpokladu, že daná nelinearita má derivaci.

### 12.1.2 Metoda přímé linearizace

Tato metoda vyžaduje, aby nelineární charakteristiky byly analytickými funkcemi svých parametrů.

Při linearizaci minimalizujeme rozdíl mezi skeletovým průběhem nelineární charakteristiky  $f_N(q)$  a její lineární náhradou  $f^*(q) = k^*q$  jako minimum středních kvadratických odchylek předrozdílových amplitud  $< -A; A >$ . Hledám tedy minimum integrálu

$$I = \int_{-A}^A (f_N(q) - k^*q)^2 dq$$

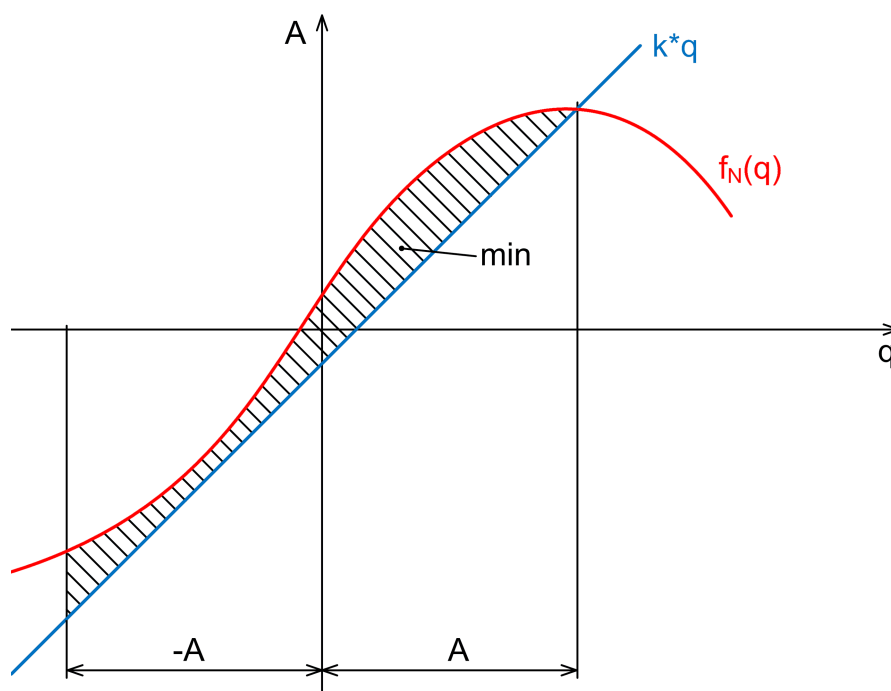
kde  $k^*$  je hledaný parametr.

Minimum integrálu v závislosti na parametru  $k^*$  určuje podmínka

$$\min = \frac{\partial I}{\partial k^*} = 0$$

což je

$$\frac{\partial}{\partial k^*} \int_{-A}^A (f_N(q) - k^* q)^2 dq = 0$$



### 12.1.3 Metoda ekvivalentní linearizace

Jedná se o jednu z nejpoužívanějších metod v technických aplikacích.

Předpokládejme, že soustava o 1° volnosti je popsána nelineární rovnicí

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + f(q, \dot{q}) = F_0 \cos \omega t$$

Předpokládáme trvalé nelinearity, což znamená, že řešení pohybové rovnice bude blízké řešení lineárnímu

$$\begin{aligned} q(t) &\doteq A \cos(\omega t - \psi) \\ \dot{q}(t) &\doteq -\omega A \sin(\omega t - \psi) \end{aligned}$$

Veličiny  $A$  a  $\psi$  nejsou konstantní, ale mění se během periody. Provedeme zprůměrování hodnot  $A$  a  $\psi$  vzhledem k periodě pohybu. Dosadíme řešení  $q(t)$  do nelineární funkce  $f(q, \dot{q})$  a tu rozvineme do Furierovy řady. Zanedbáme absolutní a všechny složky kromě prvních a dostaneme

$$f(q, \dot{q}) = U_1 \cos(\omega t - \psi) + V_1 \sin(\omega t - \psi)$$

dále se dá vyjádřit, že

$$\cos(\omega t - \psi) = \frac{q(t)}{A} \quad \sin(\omega t - \psi) = \frac{\dot{q}(t)}{-\omega A}$$

a pak

$$f(q, \dot{q}) = \frac{U_1}{A} q + \frac{V_1}{-\omega A} \dot{q}(t) - k_e q + b_e \dot{q}$$

kde  $k_e$  a  $b_e$  jsou tzv. ekvivalentní linearizovaná tuhost a ekvivalentní linearizované tlumené. Konstanty  $U_1$  a  $V_1$  lze spočítat z Furierovy řady.

$$k_e = \frac{U_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \cos(\omega t - \psi) d\omega t$$

$$b_e = \frac{-V_1}{\omega A} = -\frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \sin(\omega t - \psi) d\omega t$$

potom je pohybová rovnice ve tvaru

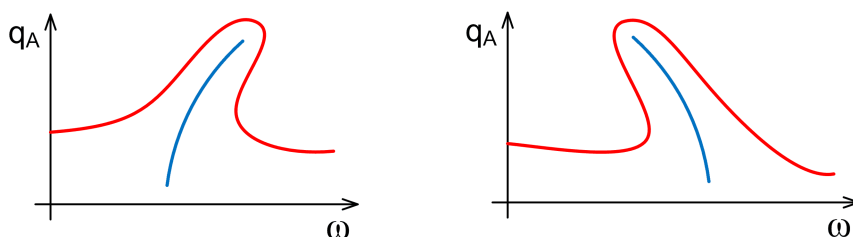
$$m\ddot{q} + (b + b_e(A))\dot{q} + (k + k_e(A))q = F_0 \cos \omega t - \psi$$

## 12.2 Přechodové charakteristiky

Přechodové charakteristiky jsou křivky, které modelují děje při přechodu rezonančních vrcholů. Obecně mohou nastat dva případy přechodu rezonančních vrcholů - rychlý přechod a pomalý přechod.

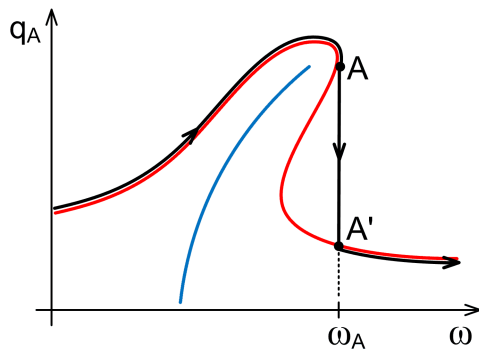
Amplitudofrekvenční závislost se vytvoří tak, že dojde k obalení skeletové křivky.

Jedním z příkladů je i následující:

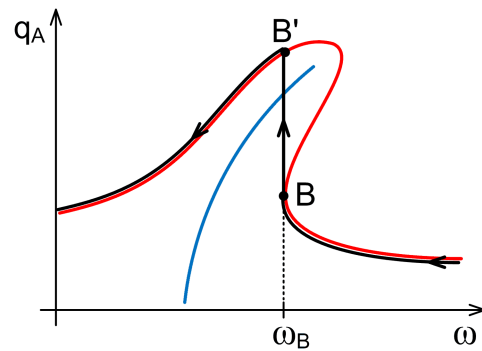


## Pomalý přechod přes rezonanci

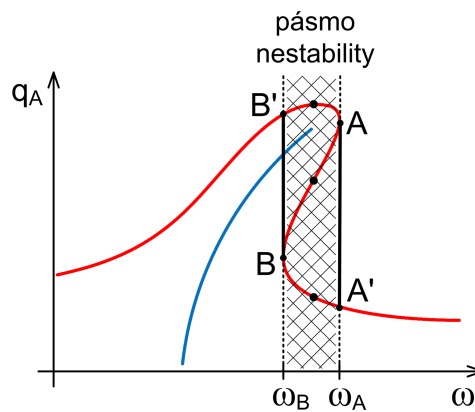
a) Nárůst



b) Pokles

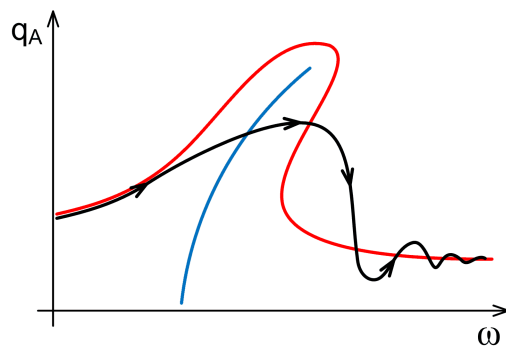


Mezi body  $\omega_A$  a  $\omega_B$  vzniká tzv. pásmo nestability. Je to oblast, kde nelze dopředu predikovat počet řešení ani které z možných řešení se vyskytne, viz obrázek

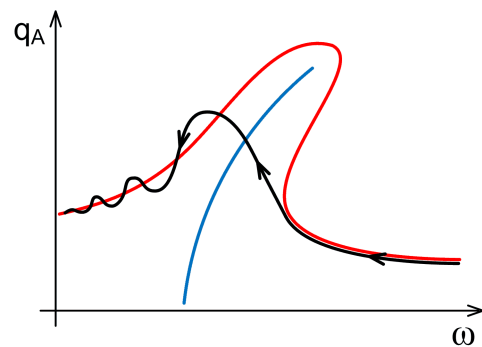


## Rychlý přechod přes rezonanci

a) Nárůst



b) Pokles



Při rychlém přechodu přes rezonanci se sníží maximální dosažená amplituda, ale objeví se však ale parazitní rezonance, a to buď za rezonancí nebo před rezonancí.



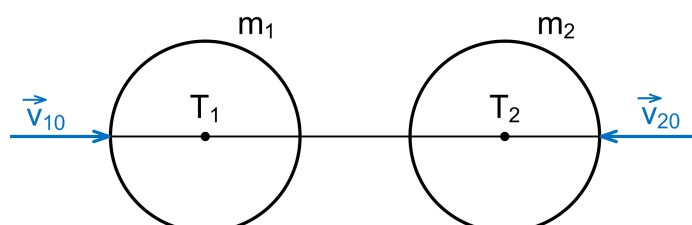
Rezonance větší než základní rezonance se nazývají ultraharmonické rezonance a jsou většinou celočíselným násobkem základní rezonance ( $2x, 3x, \dots$ ).

Rezonance menší než základní rezonance se nazývají subharmonické rezonance a jsou většinou celočíselným podílem základní rezonance ( $\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}x, \dots$ ).

## 13 RÁZ TĚLES

### 13.1 Přímý centrální ráz

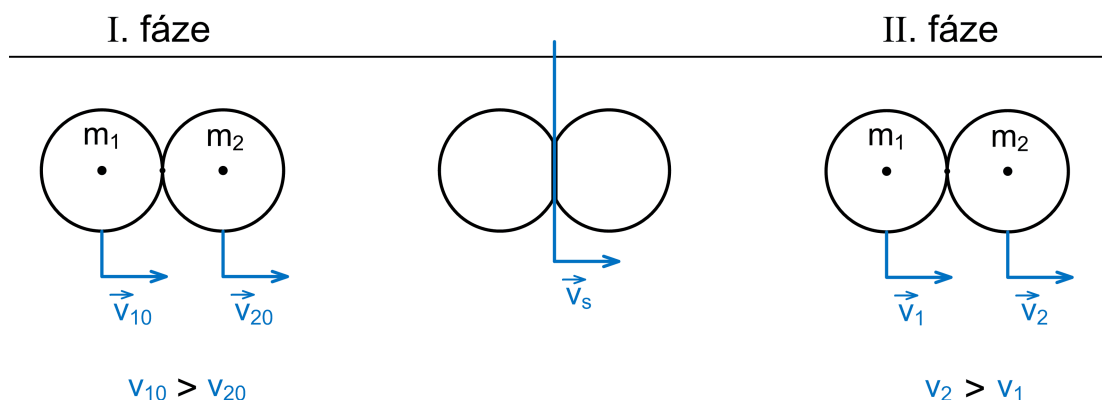
Pro přímý centrální ráz platí, že vektory rychlostí před rázem i po rázu leží na spojnici těžišť obou těles



Rozeznáváme dvě fáze rázu:

1. fáze: začíná kontaktem těles a končí v okamžiku, kdy se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí
2. fáze: začíná v okamžiku, kdy mají obě tělesa stejnou rychlost a končí v okamžiku jejich oddělení

Grafické znázornění



Obecně musí platit

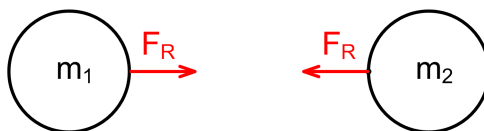
$$v_{10} > v_s > v_1$$

$$v_{20} < v_s < v_2$$

## I. fáze

Cílem je získat  $\vec{v}_s$

Uvolníme tělesa v kontaktu



Pro dvě tělesa musí platit 1. impulsová věta

1. těleso  $\int_0^t F_R dt = H_1 - H_0 = m_1(v_{10} - v_s)$

2. těleso  $\int_0^t F_R dt = H_2 - H_0 = m_2(v_s - v_{20})$

z toho

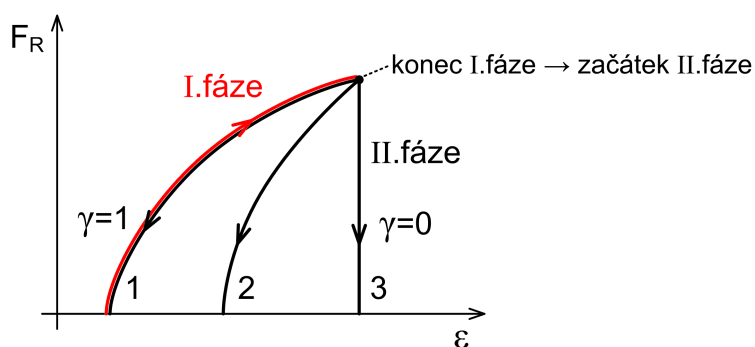
$$m_1(v_{10} - v_s) = m_2(v_s - v_{20}) \Rightarrow v_s = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

## II. fáze - restituce těles

Během této fáze se tělesa snaží zaujmout svůj původní tvar. Podle typu materiálu těles rozlišujeme tři typy:

1. Elastický
2. Elasticko-plastický
3. Plastický

Grafickou závislost udává rázový diagram



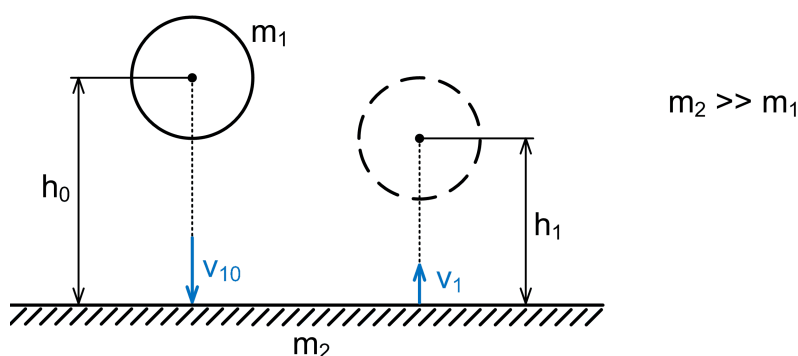
## Koeficient restituce - $\gamma$

Vyjadřuje míru deformace tělesa. Je definován pro konkrétní dva materiály jako

$$\gamma = \frac{\Delta H_2}{\Delta H_1} = \frac{\text{rozdl hybnosti v II. fázi}}{\text{rozdl hybnosti v I. fázi}} \quad (0 \div 1)$$

### Experimentální stanovení $\gamma$

Představme si například míček, který upustíme na podlahu a pozorujeme, jak vysoko míček po nárazu na zem vyskočí. Hmotnosti žádného z těles se po celou dobu experimentu nemění.



Předpokládáme, že ve výšce  $h_0$  a  $h_1$  se těleso  $m_1$  nepohybuje, tedy že má nulovou počáteční a koncovou rychlost. Dále předpokládáme, že těleso  $m_2$  mělo nulovou počáteční rychlost a že se na základě  $m_2 \gg m_1$  po nárazu také nepohybovalo. Z toho plyne, že v našem případě je  $v_s = 0$  a že platí

$$\gamma = \frac{\Delta H_2}{\Delta H_1} = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_s}{m_1 v_s - m_1 v_{10}} = \frac{m_1 v_1 - 0}{0 - m_1 v_{10}} = \frac{m_1 v_1}{-m_1 v_{10}} = \frac{v_1}{-v_{10}}$$

Znaménko mínus u  $v_{10}$  značí jen opačný směr rychlosti. Pak lze napsat

$$\gamma = \frac{v_1}{v_{10}}$$

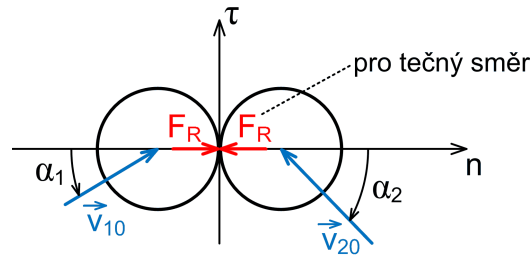
Dopadová a odrazová rychlost tělesa  $m_1$

$$v_{10} = \sqrt{2gh_0} \qquad v_{11} = \sqrt{2gh_1}$$

Finální získání  $\gamma$  z poměru výšek

$$\gamma = \frac{v_1}{v_{10}} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

## 13.2 Nepřímý ráz



$$n: v_{10_n} = v_{10} \cos \alpha_1$$

$$v_{20_n} = v_{20} \cos \alpha_2$$

$$\tau: v_{10_\tau} = v_{10} \sin \alpha_1$$

$$v_{20_\tau} = v_{20} \sin \alpha_2$$

$$0 = m_1(v_{10_\tau} - v_{s_\tau})$$

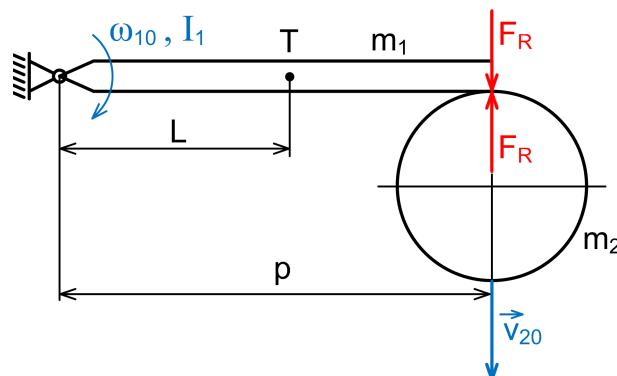
$$0 = m_2(v_{s_\tau} - v_{20_\tau})$$

↪ V tečném směru se rychlosti nemění!

V normálovém směru je situace stejná jako pro přímý centrální ráz.

## 13.3 Střed rázu

Tato teorie vyplývá z teorie rázu rotujícího tělesa na nerotující



Translační pohyb tělesa č.2 převedeme na rotační pohyb bodového tělesa pomocí vztahů

$$I_2 = m_2 p^2$$

$$v_{20} = \omega_{20} p$$

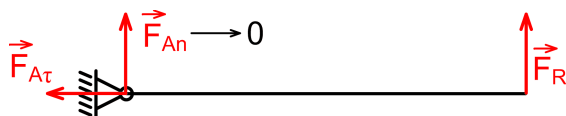
$$v_2 = \omega_2 p$$

pomocí 2. impulsové věty dostaneme závislost  $\omega_1$  a  $v_2$

$$\omega_1 = (1 + \gamma_1) \frac{I_1 \omega_{10} + m_2 p^2 \frac{v_{20}}{p}}{I_1 + m_2 p^2} - \gamma_1 \omega_{10}$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{p} = (1 + \gamma_2) \frac{I_1 \omega_{10} + m_2 p^2 \frac{v_{20}}{p}}{I_1 + m_2 p^2} - \gamma_2 \omega_{20}$$

Uvolníme-li těleso č.1, dostane ve vazbě dvě na sebe kolmé síly. Naší snahou je, aby její normálová složka byla nulová.



Opět použijeme 2. impulsovou větu (1 těleso)

$$\int_0^t (F_{A_n} + F_R) dt = I_1(\omega_{10} - \omega_1)$$

$$\int_0^t F_R dt = m_2(v_2 - v_{20})$$

Dosazením dostaneme

$$\int_0^t F_{A_n} dt + m_2(v_2 - v_{20}) = I_1(\omega_{10} - \omega_1)$$

Dosazením a úpravou dostaneme

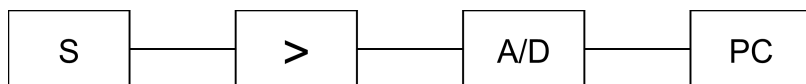
$$\underbrace{\int_0^t F_{A_n} dt}_{\rightarrow 0} = \underbrace{\frac{\omega_{10}p - v_{20}}{I_1 + \omega_2 p^2} \omega_2(1 + \varepsilon)}_{\neq 0} \underbrace{(I_1 - m_1 lp)}_{=0}$$

$$I_1 - m_1 lp = 0 \Rightarrow p = \frac{I_1}{m_1 l}$$

Vzdálenosti  $p$  se říká střed rázu a do této vzdálenosti se umísťuje uložení.

## 14 EXPERIMENT

### 14.1 Měřicí řetězec



- Snímač: převádí mechanický pohyb na některou zaznamatelnou veličinu
- Zesilovač: zvětšuje amplitudu a transformuje fázi
- A/D převodník: digitalizuje data pomocí dané vzorkovací frekvence

## 14.2 Snímače

Dělíme dle mnohých kritérií:

1. dle napájení
  - a) pasivní - je nutný zdroj el. energie pro činnost snímače
  - b) aktivní - není nutný zdroj el. energie pro činnost snímače
2. dle upevnění
  - a) kontaktní - je pevně spojen s měřeným objektem
  - b) bezkontaktní - není pevně spojen s měřeným objektem
3. dle měřené veličiny
  - a) absolutní
  - b) relativní

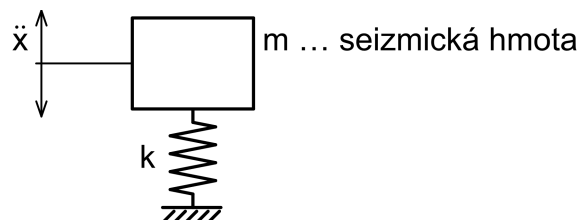
### 14.2.1 Typy snímačů

#### 1) Piezokrystalický

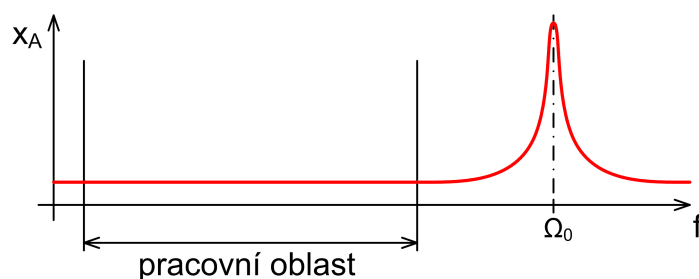
Primární elektrická veličina je náboj, tomu odpovídá mechanická veličina zrychlení. Snímač je absolutní, kontaktní a aktivní.

Matematický model:

- soustava s jedním stupněm volnosti



$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



## 2) Induktanční

Primární elektrická veličina je napětí, jemuž odpovídá mechanická veličina posuv. Snímač je relativní, pasivní a bezkontaktní. Pracuje na principu vířivých proudů; z tohoto důvodu musí být plocha proti snímači magnetická.

## 3) Indukční

Primární elektrická veličina je magnetická indukce, čemuž odpovídá mechanická veličina rychlost. Snímač je kontaktní, aktivní a absolutní. Pracuje na principu magnetické indukce, kdy dochází k pohybu jádra v cívkce a tím i k indukování proudu.

## 4) Kapacitní

Primární elektrická veličina je kapacita, tomu odpovídá mechanická veličina posuv. Je to snímač kontaktní, pasivní a absolutní. Pracuje na principu deskového kondenzátoru. Je však příliš citlivý na malém rozsahu a proto se příliš nepoužívá.

## 5) Tenzometrický

Primární elektrická veličina je odpor (změna odporu), čemuž odpovídá mechanická veličina přetvoření. Snímač je kontaktní, relativní a pasivní. Snímač využívá jevu, že se změnou profilu drátku mění odpor. Platí vztah:

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon$$

Změna odporu je malá a proto se pro měření používá tzv. Wheatstonův můstek

